

Exercices

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Assertions mathématiques et quantificateurs.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On considère les assertions mathématiques (P) et (Q) suivantes :

$$(P) : \quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = y$$

$$(Q) : \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

1. Ecrire les négations $\text{non}(P)$ et $\text{non}(Q)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Laquelle des deux assertions (P) ou (Q) est-elle vraie ? Justifier.
3. Même question avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.

Exercice 2 Somme.

1. Soit $k \geq 1$, vérifier que $k^4 + 4 = (k^2 + 2k + 2)(k^2 - 2k + 2)$.
2. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{k}{k^4 + 4} = \frac{a}{k^2 - 2k + 2} + \frac{b}{k^2 + 2k + 2}.$$

3. En déduire la somme

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + 4}.$$

Exercice 3 Images directes et réciproques.

Trouver les ensembles suivants. Justifier votre réponse.

1. Déterminer $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)\right)$, avec $f : x \in [0, 2\pi] \mapsto \cos(x)$.
2. $f^{-1}([-\infty, 2])$, avec $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x + e^{-x}$;
3. $f(\mathbb{R})$ avec $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - e^{-x}$.

Exercice 4 Injectivité et surjectivité.

1. Soient A, B et C ensembles, $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, g est surjective et si $g \circ f$ est injective, f est injective.
2. Donner un exemple d'une application
 - i) de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui est injective mais pas surjective.
 - ii) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ qui est surjective mais pas injective.