
Devoir Surveillé 1 - 21 Octobre 2024

Durée : 1h

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Injectivité et surjectivité (6 pts). Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Justifier votre réponse.

- (a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ définie par $f(n) = (n^3, n^2)$.
- (b) $g : [\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{4}\pi] \rightarrow [-1, \sqrt{2}]$ définie par $g(x) = \sqrt{2} \sin x$.
- (c) $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, x^2 - y^2)$.

Exercice 2 Images direct et réciproques (4 pts). Toutes les réponses doivent être justifiées.

- (a) Déterminer $f^{-1}\left(\left[-2, \frac{1}{2}\right]\right)$, avec $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin(x)$.
- (c) Montrer que $g : [0, 2] \rightarrow [2, 6]; x \mapsto (x - 2)^2 + 2$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 3 Somme (5 pts).

- 1. Soit $k \geq 1$, vérifier que $k^4 + k^2 + 1 = (k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1)$.
- 2. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{a}{k^2 - k + 1} + \frac{b}{k^2 + k + 1}.$$

- 3. En déduire la somme

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}.$$

Exercice 4 Ensemble (5 pts) .

Posons $E = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m^2 - 3n^2 = 1\}$. Soit $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$ l'application définie par

$$f(m, n) = (2m + 3n, m + 2n).$$

- 1. Vérifier que $(1, 0) \in E$.
- 2. Montrer que pour tout $(m, n) \in E$, $f(m, n) \in E$.
Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{N}^2$ définie par $(x_0, y_0) = (1, 0)$ et $(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n)$.
- 3. Montrer que $x_n < x_{n+1}$ et $(x_n, y_n) \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire qu'il existe une infinité d'éléments dans E .

Exercice 5 BONUS (2 pts).

Soient A, B, C trois ensembles. Montrer l'implication

$$(A \cup B) \not\subseteq C \implies (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C),$$

en prenant sa contraposée.