

Contrôle Terminal de 2ème session du 23 juin 2026

CORRECTION

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (1 + 1 + 2 = 4 points)

1. Soient $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Donner la formule reliant a , b , leur PGCD et leur PPCM. (on ne demande pas la preuve)

Correction : Soient a et b deux entiers non-nuls, alors $ab = \text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b)$.

2. Donner l'ensemble des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis ceux de $\mathbb{R}[X]$. (on ne demande pas la preuve)

Correction : Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux de degré 1 à coefficients complexes, ceux de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux de degré 1 à coefficients réels et ceux de degré 2 ayant un discriminant strictement négatif.

3. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Que vaut $e^{i(\theta+\theta')}$? En utilisant la définition de l'exponentielle complexe, démontrer ce résultat.

Correction : Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, alors on a $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$.

En effet, on a, par définition de l'exponentielle complexe et par la formule donnant le cosinus et le sinus de la somme de deux angles,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} e^{i\theta'} &= (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i (\sin \theta \cos \theta' + \sin \theta' \cos \theta) \\ &= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \\ &= e^{i(\theta+\theta')}. \end{aligned}$$

Exercice 2 Equation dans $\mathbb{C}$ (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

Indications : $13^2 = 169$ et $24^2 = 576$.

Correction : On pose $Z = z^2$ et on résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 10Z + 169 = 0$. Le discriminant de ce polynôme du second degré est $\Delta = (10)^2 - 4(1)(169) = -576 = -24^2$, donc l'équation admet deux solutions complexes

$$Z_1 = \frac{-10 + 24i}{2} = -5 + 12i \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-10 - 24i}{2} = -5 - 12i.$$

Cherchons maintenant les racines carrées de Z_1 et Z_2 , ou plutôt de $Z = -5 + 12\varepsilon i$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. On résout donc $z^2 = Z$ en posant $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On obtient donc $x^2 - y^2 + 2ixy = -5 + 12\varepsilon i$. De plus, en passant au module, on a $|z^2| = x^2 + y^2 = |Z| = \sqrt{(-5)^2 + (\varepsilon 12)^2} = \sqrt{169} = 13$ car $\varepsilon^2 = 1$. On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12\varepsilon \end{cases}$$

donc on obtient :

- en sommant les deux premières lignes, $2x^2 = 8$, donc $x^2 = 4$ et donc $x \in \{-2, 2\}$,
- en soustrayant les deux premières lignes, $2y^2 = 18$, donc $y^2 = 9$ et donc $y \in \{-3, 3\}$.

Ainsi, on a obtenu les quatre solutions de l'équation de départ :

- les racines de Z_1 , correspondant à $\varepsilon = 1$ sont, puisque la dernière équation du système nous indique que x et y sont de même signe, $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = -2 - 3i$,
- les racines de Z_2 , correspondant à $\varepsilon = -1$ sont, puisque la dernière équation du système nous indique que x et y sont de signes opposés, $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = -2 + 3i$.

Au final, l'ensemble des solutions est donc $\{2 + 3i, -2 - 3i, 2 - 3i, -2 + 3i\}$.

Exercice 3 Polynômes (2 + 1.5 + 0.5 = 4 points)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère le polynôme $P(X) = X^4 - \alpha X^3 + \beta X^2 - 4X + 4$ et on sait que 2 est une racine double de P .

1. Déterminer α et β .

Correction : Le polynôme dérivé de P est $P'(X) = 4X^3 - 3\alpha X^2 + 2\beta X - 4$. Comme 2 est racine double de P , on a

$$\begin{cases} 0 = P(2) = 2^4 - \alpha(2)^3 + \beta(2)^2 - 4(2) + 4 = 12 - 8\alpha + 4\beta \\ 0 = P'(2) = 4(2)^3 - 3\alpha(2)^2 + 2\beta(2) - 4 = 28 - 12\alpha + 4\beta \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on obtient $0 = -16 + 4\alpha$ et donc $\alpha = 4$. On en déduit, en remplaçant α par 4, que $0 = 12 - 32 + 4\beta$, c'est-à-dire $0 = -20 + 4\beta$ et donc $\beta = 5$. Ainsi, on a

$$P(X) = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 4.$$

2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction : Comme 2 est racine double de P , alors $(X - 2)^2 | P(X)$. En effectuant la division euclidienne, on obtient $P(X) = (X - 2)^2(X^2 + 1)$. Comme $X - 2$ est de degré 1, donc irréductible, et que le discriminant de $X^2 + 1$ est $\Delta = 0^2 - 4(1)(1) = -4 < 0$ alors $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, donc la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$P(X) = (X - 2)^2(X^2 + 1).$$

3. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Correction : Pour factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, il faut trouver les racines de $X^2 + 1$. Or, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + 1 = 0 \iff z^2 = -1 \iff z \in \{-i, i\}$, d'où la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = (X - 2)^2(X - i)(X + i).$$

Exercice 4 Arithmétique (1 + 0.5 + 1 + 1.5 = 4 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 5^n + 19$.

1. En utilisant les congruences, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est divisible par 4.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$, alors on a, comme $5 \equiv 1 [4]$,

$$a_n = 5^n + 19 \equiv 1^n + 19 [4] \equiv 1 + 19 [4] \equiv 20 [4] = 0 [4],$$

donc $4 \mid a_n$.

2. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+3} = 25a_{2k+1} - 456$.

Correction : Soit $k \in \mathbb{N}$, alors

$$25a_{2k+1} - 456 = 25(5^{2k+1} + 19) - 456 = 5^2 \times 5^{2k+1} + 25 \times 19 - 456 = 5^{2k+3} + 19 = a_{2k+3}.$$

- b) En déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence, que si n est un entier naturel impair, alors a_n est divisible par 3.

Correction : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $P(k) : "3 \mid a_{2k+1}"$.

Initialisation : pour $k = 0$, alors $a_{2 \times 0 + 1} = a_1 = 5^1 + 19 = 24$ est divisible par 3, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $P(k)$ est vraie et montrons que $P(k+1)$ est vraie. Puisque $a_{2(k+1)+1} = a_{2k+3} = 25a_{2k+1} - 456$, que a_{2k+1} est divisible par 3 (par hypothèse) et que 456 est aussi divisible par 3 (car $4 + 5 + 6 = 15$ est divisible par 3), alors a_{2k+3} est divisible par 3, donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire, donc, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_{2k+1} est divisible par 3.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $456x + 25y = 1$.

Correction : On commence par calculer le PGCD de 456 et 25 en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$456 = 18 \times 25 + 6$$

$$25 = 4 \times 6 + 1$$

$$6 = 6 \times 1 + 0,$$

donc $\text{PGCD}(456, 25) = 1$, donc l'équation admet une infinité de solutions. Remontons l'algorithme d'Euclide pour obtenir une solution particulière de cette équation :

$$1 = 25 - 4 \times 6 = 25 - 4 \times (456 - 18 \times 25) = 456(-4) + 25(73),$$

donc $(-4, 73)$ est une solution particulière de l'équation. En appliquant directement le résultat du cours, puisque les entiers 456 et 25 sont premiers entre eux, on obtient que l'ensemble des solutions de l'équation est

$$S = \{(-4 + 25k, 73 - 456k) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 5 Valeurs entières d'un polynôme (1.5 + 1 + 1.5 = 4 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $P_n(X) = (1+X)^n + (1+X^2)^n$. De plus, on note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminer $\{n \in \mathbb{N} : P_n(i) \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels n tels que $P_n(i)$ soit un entier relatif.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$P_n(i) = (1+i)^n + (1+i^2)^n = (1+i)^n + (1-1)^n = (1+i)^n.$$

Or on a $|1+i| = \sqrt{2}$, donc $1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, et ainsi

$$P_n(i) = \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}}.$$

On raisonne modulo 4 en notant $n = 4k + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Alors,

$$\sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}} = 4^k \sqrt{2}^r e^{i(\pi + \frac{r\pi}{4})} = \begin{cases} 4^k e^{i\pi} = -4^k \in \mathbb{Z} & \text{si } r = 0 \\ 4^k \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} \notin \mathbb{Z} & \text{si } r = 1 \\ 2 \times 4^k e^{i\frac{3\pi}{2}} \notin \mathbb{Z} & \text{si } r = 2 \\ 2 \times 4^k \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}} \notin \mathbb{Z} & \text{si } r = 3 \end{cases}$$

puisque $e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{2}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\{n \in \mathbb{N} : P_n(i) \in \mathbb{Z}\} = 4\mathbb{N}.$$

2. Calculer j^3 et en déduire que $P_1(j) = 1$.

Correction : Comme $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, on obtient $j^3 = e^{2i\pi} = 1$ et donc

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0.$$

Ainsi, $P_1(j) = (1+j)^1 + (1+j^2)^1 = 1 + 1 + j + j^2 = 1 + 0 = 1$.

3. Montrer que $\bar{j} = j^2$ et en déduire que $\{n \in \mathbb{N} : P_n(j) \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{N}$.

Correction : On a $\bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et donc

$$j^2 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{6\pi-2\pi}{3}} = e^{2i\pi-i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{j}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors,

$$P_n(j) = (1+j)^n + (1+j^2)^n = (1+j)^n + (1+\bar{j})^n.$$

Or $1+j = -j^2 = -\bar{j}$ et $1+j^2 = -j$, d'où

$$P_n(j) = (-1)^n (j^n + \bar{j}^n) = (-1)^n \left(e^{i\frac{2n\pi}{3}} + e^{-i\frac{2n\pi}{3}} \right) = 2(-1)^n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = \begin{cases} 2(-1)^n \in \mathbb{Z} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ (-1)^{n+1} \in \mathbb{Z} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3} \\ (-1)^{n+1} \in \mathbb{Z} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

car $\cos(0) = 1$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Il en découle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(j) \in \mathbb{Z}$ et donc que $\{n \in \mathbb{N} : P_n(j) \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{N}$.