

Contrôle Terminal de 2ème session du 23 juin 2026

Durée : 2 heures

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (1 + 1 + 2 = 4 points)

1. Soient $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Donner la formule reliant a , b , leur PGCD et leur PPCM. (on ne demande pas la preuve)
2. Donner l'ensemble des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis ceux de $\mathbb{R}[X]$. (on ne demande pas la preuve)
3. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Que vaut $e^{i(\theta+\theta')}$? En utilisant la définition de l'exponentielle complexe, démontrer ce résultat.

Exercice 2 Equation dans $\mathbb{C}$ (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

Indications : $13^2 = 169$ et $24^2 = 576$.

Exercice 3 Polynômes (2 + 1.5 + 0.5 = 4 points)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère le polynôme $P(X) = X^4 - \alpha X^3 + \beta X^2 - 4X + 4$ et on sait que 2 est une racine double de P .

1. Déterminer α et β .
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4 Arithmétique (1 + 0.5 + 1 + 1.5 = 4 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 5^n + 19$.

1. En utilisant les congruences, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est divisible par 4.
2. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+3} = 25a_{2k+1} - 456$.
b) En déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence, que si n est un entier naturel impair, alors a_n est divisible par 3.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $456x + 25y = 1$.

Exercice 5 Valeurs entières d'un polynôme (1.5 + 1 + 1.5 = 4 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $P_n(X) = (1+X)^n + (1+X^2)^n$. De plus, on note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminer $\{n \in \mathbb{N} : P_n(i) \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels n tels que $P_n(i)$ soit un entier relatif.
2. Calculer j^3 et en déduire que $P_1(j) = 1$.
3. Montrer que $\bar{j} = j^2$ et en déduire que $\{n \in \mathbb{N} : P_n(j) \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{N}$.