Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre d'automne 2025–2026**

L1 UE : Algèbre 1 pour les Mathématiques

Sujet blanc pour préparer le Contrôle Terminal

Ce sujet est volontairement un peu long, pour pouvoir réviser l'essentiel du programme.

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 **Questions de cours (1 + 3 = 4 points)**

1. Enoncer le Théorème fondamental de l'Arithmétique (on ne demande pas la preuve !).
2. Soient a et b deux entiers relatifs non-nuls. Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$au + bv = \mathrm{PGCD}(a, b).$$

Exercice 2 **Equations complexes (2 + 2 = 4 points)**

1. Déterminer les racines carrées de $9 + 40i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (1 - 5i)z - 2 + 6i = 0$.

Exercice 3 **Polynômes (1 + 1 + 1.5 + 0.5 = 4 points)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $P_n = (X + 1)^n - nX - 1$ et on note Z_n l'ensemble des racines de P_n dans $\mathbb{C}$, sans prendre en compte leurs multiplicités.

1. Factoriser P_2, P_3 et P_4 dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer Z_2, Z_3 et Z_4.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X^2 divise P_n.
3. Déterminer le PGCD de P_4 et P_3 en utilisant les factorisations de la question 1, puis avec l'algorithme d'Euclide.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note R_n le reste de la division euclidienne de P_n par $X^2 - 1$.
   Montrer que $R_n(1) = 2^n - n - 1$ et $R_n(-1) = n - 1$, puis en déduire l'expression de R_n.

Exercice 4 **Arithmétique (1 + 1 + 1 + 1 = 4 points)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_n = 2^n + 3^n$.

1. En utilisant les congruences, montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $5 \mid a_{2n+3}$.
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD de 275 et 35.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $a_3x + a_5y = 3$. Résoudre de même l'équation $a_3x + a_5y = 10$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.
   Indication : Calculer $a_{n+1} - 3a_n$ et $a_{n+1} - 2a_n$.

Exercice 5 **Entiers de Gauss (0.5 + 1 + 1 + 1.5 = 4 points)**

On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[i] = \{z = a + ib : (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ ainsi que l'application $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \overline{z}z$, appelé *stathme* de $\mathbb{Z}[i]$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $(z, z') \in \mathbb{Z}[i]^2$, $zz' \in \mathbb{Z}[i]$ et $N(zz') = N(z)N(z')$.
3. Soit $z \in \mathbb{Z}[i] \backslash \{0\}$ tel que $z^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que $N(z) = 1$.
4. En déduire $\{z \in \mathbb{Z}[i] \backslash \{0\} : z^{-1} \in \mathbb{Z}[i]\}$.