Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre d'automne 2025–2026**

L1 | UE : Algèbre 1 pour les Mathématiques

Contrôle Terminal du 12 janvier 2026

CORRECTION

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (1 + 1 + 2 = 4 points)

1. Enoncer la formule de Moivre (on ne demande pas la preuve).

   Correction. (1 point) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, c'est-à-dire $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

2. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, que peut-on dire de $\deg(P+Q)$ (on ne demande pas la preuve) ?

   Correction. (1 point) Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, alors $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.

3. Enoncer et démontrer le Lemme de Gauss.

   Correction. (2 points)

   — (1 point) Enoncé : Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ tels que a et b sont premiers entre eux et $a|bc$. Alors $a|c$.

   — (0.25 point) Preuve : En effet, comme a et b sont premiers entre eux, il existe d'après le Théorème de Bézout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$.

   — (0.25 point) On a donc $auc + bcv = c$.

   — (0.25 point) Comme $a|bc$, alors $a|bcv$.

   — (0.25 point) De plus, $a|auc$, donc finalement $a|c$.

Exercice 2 Polynômes (0.5 + 1 + 1.5 + 1 = 4 points)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$ où -1 est une racine de P.

1. Montrer que $\alpha = 8$.

   Correction. (0.5 point)

   — (0.25 point) Comme -1 est racine de P, $P(-1) = 0$,

   — (0.25 point) et on a donc

   $$P(-1) = 1 - 4 + 8 - 10 + \alpha - 4 + 1 = 0,$$

   et on obtient $\alpha - 8 = 0$, donc $\alpha = 8$.

2. Montrer que -1 est une racine double de P.

   Correction. (1 point)

   — (0.5 point) Les deux premiers polynômes dérivées de P sont

   $$P' = 6X^5 + 20X^4 + 32X^3 + 30X^2 + 16X + 4 \quad \text{et} \quad P'' = 30X^4 + 80X^3 + 96X^2 + 60X + 16.$$

   — (0.25 point) Comme $P(-1) = P'(-1) = 0$ et

   — (0.25 point) $P''(-1) = 2 \neq 0$, alors -1 est racine double de P.

3. Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine de multiplicité au moins de 2 de P en utilisant le fait que j est racine du polynôme $X^2 + X + 1$.

Correction.(1.5 point)

— (0.75 point) On calcule

$$\begin{aligned}
P(j) &= \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^6 + 4\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^5 + 8\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^4 + 10\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 + 8\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 + 4e^{\frac{2i\pi}{3}} + 1 \\
&= e^{4i\pi} + 4e^{\frac{10i\pi}{3}} + 8e^{\frac{8i\pi}{3}} + 10e^{2i\pi} + 8e^{\frac{4i\pi}{3}} + 4e^{\frac{2i\pi}{3}} + 1 \\
&= 1 + 4e^{\frac{4i\pi}{3}} + 8e^{\frac{2i\pi}{3}} + 10 + 8e^{\frac{4i\pi}{3}} + 4e^{\frac{2i\pi}{3}} + 1 \\
&= 12 + 12e^{\frac{2i\pi}{3}} + 8e^{\frac{4i\pi}{3}} \\
&= 12(1 + j + j^2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

— (0.75 point) et, de même

$$\begin{aligned}
P'(j) &= 6\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^5 + 20\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^4 + 32\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 + 30\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 + 16e^{\frac{2i\pi}{3}} + 4 \\
&= 6e^{\frac{10i\pi}{3}} + 20e^{\frac{8i\pi}{3}} + 32e^{2i\pi} + 30e^{\frac{4i\pi}{3}} + 16e^{\frac{2i\pi}{3}} + 4 \\
&= 6e^{\frac{4i\pi}{3}} + 20e^{\frac{2i\pi}{3}} + 32 + 30e^{\frac{4i\pi}{3}} + 16e^{\frac{2i\pi}{3}} + 4 \\
&= 36(1 + j + j^2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, j est racine au moins double de P.

4. En déduire une autre racine double de P et factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction. (1 point)

— (0.5 point) Comme $P \in \mathbb{R}[X]$ et que j est racine au moins double de P, alors $\overline{j}$ est aussi racine au moins double de P. On peut donc factoriser P par $(X+1)^2$ par la question 2., puis par $(X-j)^2$ d'après la question 3. et donc par $(X-\overline{j})^2$. Ainsi, comme son coefficient dominant est 1 et son degré 6, on obtient

$$P = (X+1)^2(X-j)^2(X-\overline{j})^2,$$

ce qui est la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

— (0.5 point) De plus, comme j et $\overline{j}$ sont tous les deux des racines de $X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$, on obtient $(X-j)(X-\overline{j}) = X^2 + X + 1$ et ainsi

$$P = (X+1)^2(X^2+X+1)^2,$$

ce qui est la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$, puisque $X+1$ et X^2+X+1 (qui a deux racines complexes) sont irréductibles.

Exercice 3 **Nombres complexes et polynômes du second degrés ($2+1+1=4$ points)**

1. Déterminer les racines carrées de $-15-8i$.

   Correction. (2 points)

   — (0.25 point) Soit $z=x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, alors on souhaite résoudre l'équation $z^2=-15-8i$. On a donc $x^2-y^2+2ixy=-15-8i$,

   — (0.25 point) et, de plus, $|z|^2=x^2+y^2=|-15-8i|=\sqrt{15^2+8^2}=17$. On a donc le système

   $$\begin{cases} x^2-y^2=-15 \\ x^2+y^2=17 \\ 2xy=-8. \end{cases}$$

   — (0.5 point) On obtient ainsi $2x^2=-15+17=2$, donc $x\in\{-1,1\}$

   — (0.5 point) et de même $2y^2=17+15=32$ donc $y\in\{-4,4\}$.

   — (0.25 point) Comme $xy=-4<0$, x et y sont de signes opposés

   — (0.25 point) donc les racines carrées de $-15-8i$ sont donc $1-4i$ et $-1+4i$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-(3+2i)z+5+5i=0$.

   Correction. (1 point)

   — (0.25 point) Le discriminant de ce polynôme du second degré est $\Delta=(3+2i)^2-4(1)(5+5i)=-15-8i$.

   — (0.25 point) Ses racines carrées sont donc, d'après la question précédentes, $1-4i$ et $-1+4i$,

   — (0.5 point) et les solutions de l'équations sont donc

   $$z_1=\frac{3+2i+1-4i}{2}=2-i \quad \text{et} \quad z_2=\frac{3+2i-1+4i}{2}=1+3i.$$

3. Soit $P=X^2-(3+2i)X+5+5i\in\mathbb{C}[X]$. Donner un exemple, en justifiant, de polynôme $Q\in\mathbb{C}[X]$ de degré 2 qui soit premier avec P.

   Correction. (1 point)

   — (0.5 point) Il suffit de choisir (par exemple) $Q_1=X^2$, ou bien (par exemple) $Q_2=P+1$.

   — (0.5 point) Comme Q_1 n'admet que 0 comme racine qui n'est pas racine de P, ces deux polynômes sont premiers entre eux.

   Pour l'autre exemple, en effectuant la division euclidienne de Q_2 par P, on obtient évidemment $Q_2=P+1$, puis $P=1\times P+0$, donc $\mathrm{PGCD}(Q_2,P)=1$.

Exercice 4 **Arithmétique ($1.5+1+1.5=4$ points)**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit $a_n=4^{2^n}+2^{2^n}+1$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $a_n^2-2\left(8^{2^n}+4^{2^n}+2^{2^n}\right)=a_{n+1}$ et en déduire que $a_{n+1}\equiv a_n^2-2a_n$ [7].

   Correction. (1.5 point)

   — (0.75 point) Soit $n\in\mathbb{N}$, alors on a

   $$\begin{aligned} a_n^2-2\left(8^{2^n}+4^{2^n}+2^{2^n}\right) &= \left(4^{2^n}+2^{2^n}+1\right)^2-2\left(8^{2^n}+4^{2^n}+2^{2^n}\right) \\ &= \left(4^{2^n}\right)^2+\left(2^{2^n}\right)^2+1+2.4^{2^n}+2.2^{2^n}+2.4^{2^n}.2^{2^n}-2\left(8^{2^n}+4^{2^n}+2^{2^n}\right) \\ &= 4^{2^{n+1}}+2^{2^{n+1}}+1+2.4^{2^n}+2.2^{2^n}+2.8^{2^n}-2\left(8^{2^n}+4^{2^n}+2^{2^n}\right) \\ &= 4^{2^{n+1}}+2^{2^{n+1}}+1 \\ &= a_{n+1}. \end{aligned}$$

   — (0.5 point) Ainsi, comme $8\equiv 1$ [7], on obtient

   $$8^{2^n}+4^{2^n}+2^{2^n}\equiv 1^{2^n}+4^{2^n}+2^{2^n}\ [7]\equiv a_n\ [7],$$

— (0.25 point) d'où $a_{n+1} = a_n^2 - 2\left(8^{2^n} + 4^{2^n} + 2^{2^n}\right) \equiv a_n^2 - 2a_n$ [7].

2. En utilisant la question précédente, montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $7 \mid a_n$.

Correction. (1 point)

— (0.25 point) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition

$$P(n) : "7 \mid a_n".$$

— (0.25 point) Initialisation : Pour $n = 0$, on a $a_0 = 4^1 + 2^1 + 1 = 7$ qui est bien divisible par 7. Donc $P(0)$ est vraie.

— (0.25 point) Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. Comme on a $a_{n+1} \equiv a_n^2 - 2a_n$ [7] et que $7 \mid a_n$, alors $a_{n+1} \equiv 0^2 - 2 \times 0$ [7] $\equiv 0$ [7], donc a_{n+1} est divisible par 7 et ainsi $P(n+1)$ est vraie.

— (0.25 point) Conclusion : On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7 \mid a_n$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $273x + 49y = 14$.

Correction. (1.5 point)

— (0.5 point) Par l'algorithme d'Euclide, on a :

$$\begin{aligned} 273 &= 5 \times 49 + 28 \\ 49 &= 28 + 21 \\ 28 &= 21 + 7 \\ 21 &= 3 \times 7 + 0, \end{aligned}$$

donc $\mathrm{PGCD}(273, 49) = 7$, qui divise 14, donc l'équation admet des solutions.

— (0.5 point) En remontant l'algorithme d'Euclide, on obtient

$$7 = 28 - 21 = 28 - (49 - 28) = 2 \times 28 - 49 = 2(273 - 5 \times 49) - 49 = 273(2) + 49(-11),$$

donc, en multipliant par 2, $(4, -22)$ est solution de l'équation $273x + 49y = 14$.

— (0.5 point) En divisant 273 et 49 par leur PGCD, on obtient 39 et 7 (qui sont donc premiers entre eux), et l'ensemble des solution de l'équation est donc

$$S = \{(4 + 7k, -22 - 39k) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 5 Polynômes cyclotomiques (1 + 1.5 + 1.5 = 4 points)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Phi_n = \prod_{\substack{k=1 \\ \mathrm{PGCD}(k,n)=1}}^{n} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$ le n-ième polynôme cyclotomique, où on multiplie donc tous les polynômes de la forme $X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et tels que $\mathrm{PGCD}(k, n) = 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des racines n-ièmes de 1.

Correction. (1 point)

— (0.5 point) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n-ième de 1 sont les solutions de l'équation $z^n = 1 = 1e^{i0\pi}$,

— (0.5 point) donc il s'agit de l'ensemble $U_n = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

2. Calculer et développer Φ_1, Φ_2 et Φ_4 (on cherchera à obtenir des polynômes de $\mathbb{R}[X]$).

Correction. (1.5 point) On a

— (0.25 point) $\Phi_1 = \prod_{\substack{k=1 \\ \mathrm{PGCD}(k,1)=1}}^{1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{1}}\right) = X - e^{2i\pi} = X - 1$, car $\mathrm{PGCD}(1,1) = 1$,

— (0.5 point) $\Phi_2 = \prod_{\substack{k=1 \\ \mathrm{PGCD}(k,2)=1}}^{2} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{2}}\right) = X - e^{i\pi} = X + 1$, car $\mathrm{PGCD}(1,2) = 1$ et $\mathrm{PGCD}(2,2) = 2 \neq 1$,

— (0.75 point) $\Phi_4 = \prod_{\substack{k=1 \\ \mathrm{PGCD}(k,4)=1}}^{4} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{4}}\right) = \left(X - e^{\frac{2i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{6i\pi}{4}}\right) = (X-i)(X+i) = X^2+1$, car $\mathrm{PGCD}(1,4) = 1$, $\mathrm{PGCD}(2,4) = 2 \neq 1$, $\mathrm{PGCD}(3,4) = 1$ et $\mathrm{PGCD}(4,4) = 4 \neq 1$.

3. Soit p est un nombre premier. Montrer que $\Phi_p = \sum_{j=0}^{p-1} X^j$.

Correction. (1.5 point)

— (0.25 point) Si p est un nombre premier, alors $\{k : 1 \leqslant k \leqslant p, \mathrm{PGCD}(k,p) = 1\} = [\![1, p-1]\!]$,

— (0.5 point) donc, comme les racines de $X^p - 1$ sont les racines n-ièmes de l'unité, on obtient

$$X^p - 1 = \prod_{k=0}^{p-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{p}}\right) \quad \text{et} \quad X^p - 1 = (X-1)\sum_{j=0}^{p-1} X^j$$

— (0.75 point) on obtient

$$\Phi_p = \prod_{k=1}^{p-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{p}}\right) = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{p}}\right)}{X-1} = \frac{X^p - 1}{X-1} = 1 + X + \ldots + X^{p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} X^j.$$