**Université Claude Bernard - Lyon 1** **Semestre d'automne 2025–2026**

L1 UE : Algèbre 1 pour les Mathématiques

---

**Contrôle Terminal du 12 janvier 2026**

Durée : 2 heures

---

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

**Exercice 1 Questions de cours ($1 + 1 + 2 = 4$ points)**

1. Enoncer la formule de Moivre (on ne demande pas la preuve).
2. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, que peut-on dire de $\deg(P+Q)$ (on ne demande pas la preuve) ?
3. Enoncer et démontrer le Lemme de Gauss.

**Exercice 2 Factorisation d'un polynôme ($0.5 + 1 + 1.5 + 1 = 4$ points)**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$, où $-1$ est une racine de $P$.

1. Montrer que $\alpha = 8$.
2. Montrer que $-1$ est une racine double de $P$.
3. Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine de multiplicité au moins de 2 de $P$ en utilisant le fait que $j$ est racine du polynôme $X^2 + X + 1$.
4. En déduire une autre racine double de $P$ et factoriser $P$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 3 Nombres complexes et polynômes du second degrés ($2 + 1 + 1 = 4$ points)**

1. Déterminer les racines carrées de $\delta = -15 - 8i$.
   *Indication :* $15^2 = 225$ *et* $17^2 = 289$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i = 0$.
3. Soit $P = X^2 - (3+2i)X + 5 + 5i \in \mathbb{C}[X]$. Donner un exemple, en justifiant, de polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 qui soit premier avec $P$.

**Exercice 4 Arithmétique ($1.5 + 1 + 1.5 = 4$ points)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_n = 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_n^2 - 2\left(8^{2^n} + 4^{2^n} + 2^{2^n}\right) = a_{n+1}$ et en déduire que $a_{n+1} \equiv a_n^2 - 2a_n$ [7].
2. En utilisant la question précédente, montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $7 \mid a_n$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $273x + 49y = 14$.

**Exercice 5 Polynômes cyclotomiques ($1 + 1.5 + 1.5 = 4$ points)**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Phi_n = \prod_{\substack{k=1 \\ \mathrm{PGCD}(k,n)=1}}^{n} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$ le $n$-ième polynôme cyclotomique, où on multiplie donc tous les polynômes de la forme $X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et tels que $\mathrm{PGCD}(k,n) = 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des racines $n$-ièmes de 1.
2. Calculer et développer $\Phi_1$, $\Phi_2$ et $\Phi_4$ (on cherchera à obtenir des polynômes de $\mathbb{R}[X]$).
3. Soit $p$ est un nombre premier. Montrer que $\Phi_p = \sum_{j=0}^{p-1} X^j$.