Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre d'automne 2025–2026**

L1 | UE : Algèbre 1 pour les Mathématiques

Sujet blanc pour préparer le Contrôle Partiel du 10/11/25

Durée : 1h15

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (1 + 3 = 4 points)

Soit E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application.

1. Donner la définition de f injective, avec les quantificateurs.
2. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$.

Exercice 2 Sommes (1 + 1 + 2 = 4 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les trois sommes suivantes en fonction de n :

$$S_1(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad S_2(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k 7^{n-k}, \quad \text{et} \quad S_3(n) = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}.$$

Exercice 3 Récurrence (4 points)

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 4 Raisonnements (1 + 1 + 1 + 1 = 4 points)

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausse ? Justifier.

1. $\exists (x, y) \in \mathbb{D}^2,\ xy \notin \mathbb{D}$.
2. On a l'inclusion suivante : $\{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2y^2 + (2x^2 - 1)^2 = 1\}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \Longrightarrow x = 0$.
4. L'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, définie par $f(n) = \dfrac{n}{2}$ si n est pair et $f(n) = 0$ si n est impair, est bijective.

Exercice 5 Applications (2+2 = 4 points)

Soit E un ensemble non-vide, $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ définie par

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad f(X) = (X \cup A, X \cup B).$$

1. Montrer que f n'est pas surjective.
   Indication : considérer les couples $(\emptyset, \emptyset)$ et $(E, \emptyset)$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
   Indication : pour une des implications, on pourra calculer $f(A \cap B)$ et $f(\emptyset)$.