Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre d'automne 2025–2026**

L1 | UE : Algèbre 1 pour les Mathématiques

Contrôle Partiel du Lundi 10 Novembre 2025

Durée : 1h15

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (1 + 3 = 4 points)

Soit E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application.

1. Donner la définition de f surjective, avec les quantificateurs.
2. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Exercice 2 Récurrence (4 points)

Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, $5^n \geq 3^n + 4^n$.

Exercice 3 Sommes (1 + 1 + 2 = 4 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les trois sommes suivantes en fonction de n :

$$S_1(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}, \quad S_2(n) = \sum_{k=0}^{n} 3^{k-n}, \quad \text{et} \quad S_3(n) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Exercice 4 Raisonnements (0.5 + 1.5 + 1 + 1 = 4 points)

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausse ? Justifier.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour que $x^2 > 1$, il est nécessaire que $x > 1$.
2. On a l'inclusion suivante : $\{(t^3 - 3t^2, 3t - 1) : t \in \mathbb{R}, t \geq 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$.
3. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x + y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant \dfrac{z}{2}$ ou $y \leqslant \dfrac{z}{2}$.
4. L'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(p, q) \mapsto \dfrac{p}{q}$ est bijective.

Exercice 5 Ensembles et applications (4 points)

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad f(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

Indication : pour une des implications, on pourra calculer $f(A \cup B)$ et $f(E)$.