

Contrôle Partiel du Lundi 10 Novembre 2025

CORRECTION

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (1 + 3 = 4 points)

Soit E et F deux ensembles, et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Donner la définition de f surjective, avec les quantificateurs.

Correction. $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

2. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Correction. Soit A et B deux parties de E .

Soit $y \in f(A \cap B)$, alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.

Comme $x \in A, y = f(x) \in f(A)$. De même, comme $x \in B, y = f(x) \in f(B)$.

On en déduit que $y \in f(A) \cap f(B)$ et donc que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Exercice 2 Récurrence (4 points)

Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 2, 5^n \geq 3^n + 4^n$.

Correction. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $P(n) : "5^n \geq 3^n + 4^n"$.

Initialisation : pour $n = 2$, on a $5^2 = 25$ et $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, donc on a bien $5^2 \geq 3^2 + 4^2$. $P(2)$ est donc vraie.

Hérédité : soit $n \geq 2$ un entier. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a donc

$$5^{n+1} = 5 \cdot 5^n \geq 5(3^n + 4^n) = 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 4^n \geq 3 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n = 3^{n+1} + 4^{n+1},$$

où la première inégalité découle de l'hypothèse de récurrence $P(n)$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a donc montré par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2, 5^n \geq 3^n + 4^n$.

Exercice 3 Sommes (1 + 1 + 2 = 4 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les trois sommes suivantes en fonction de n :

$$S_1(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k}, \quad S_2(n) = \sum_{k=0}^n 3^{k-n}, \quad \text{et} \quad S_3(n) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a

- $S_1(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 1^k = (2+1)^n = 3^n$ en utilisant la formule du binôme de Newton ;
- $S_2(n) = 3^{-n} \sum_{k=0}^n 3^k = 3^{-n} \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-1}{2 \cdot 3^n}$ car il s'agit d'une somme géométrique ;
- $S_3(n) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k+2} = \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} - \sum_{j=4}^{n+3} \frac{1}{j}$,
où on a posé $j = k+1$ dans la première somme et $j = k+2$ dans la seconde. On obtient donc
 $S_3(n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} = \frac{n}{3(n+3)}$ par télescopage.

Exercice 4 Raisonnements (0.5 + 1.5 + 1 + 1 = 4 points)

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour que $x^2 > 1$, il est nécessaire que $x > 1$.

Correction. FAUX. Si $x = -4 < 1$, $x^2 = 16 > 1$.

2. On a l'inclusion suivante : $\{(t^3 - 3t^2, 3t - 1) : t \in \mathbb{R}, t \geq 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$.

Correction. VRAI. Notons A le premier ensemble et B le deuxième. Soit $(x, y) \in A$, alors il existe un réel $t \geq 1$ tel que $(x, y) = (t^3 - 3t^2, 3t - 1)$. On a donc $x + y = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t - 1)^3$ d'après la formule du binôme de Newton. Comme $t \geq 1$, $x + y = (t - 1)^3 \geq 0$ et donc $(x, y) \in B$. On a donc montré que $A \subset B$.

3. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y \leq z \implies x \leq \frac{z}{2} \text{ ou } y \leq \frac{z}{2}$.

Correction. VRAI. La contraposée de cette proposition est :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > \frac{z}{2} \text{ et } y > \frac{z}{2} \implies x + y > z.$$

Celle-ci est vraie puisque, soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si $x > \frac{z}{2}$ et $y > \frac{z}{2}$, alors $x + y > \frac{z}{2} + \frac{z}{2} = z$.

4. L'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}, (p, q) \mapsto \frac{p}{q}$ est bijective.

Correction. FAUX. Cette application n'est pas injective car $f(1, 2) = f(2, 4) = \frac{1}{2}$ et $(1, 2) \neq (2, 4)$.

Exercice 5 Ensembles et applications (4 points)

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E et $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad f(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

Indication : pour une des implications, on pourra calculer $f(A \cup B)$ et $f(E)$.

Correction. Supposons que f est injective et montrons que $A \cup B = E$. En effet, on a :

$$f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = (A, B)$$

$$f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B),$$

et donc $f(A \cup B) = f(E)$. Par injectivité de f , on en déduit que $A \cup B = E$.

Réciproquement, supposons que $A \cup B = E$ et montrons que f est injective. Soit $X, X' \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(X')$, alors on a $X \cap A = X' \cap A$ et $X \cap B = X' \cap B$ et donc

$$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (X' \cap A) \cup (X' \cap B) = X' \cap (A \cup B) = X' \cap E = X'.$$

Ainsi, f est injective et on a bien montré l'équivalence recherchée.