

Exercices
CORRECTION

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Assertions mathématiques et quantificateurs.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On considère les assertions mathématiques (P) et (Q) suivantes :

$$(P) : \quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = y$$

$$(Q) : \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

1. Ecrire les négations $\text{non}(P)$ et $\text{non}(Q)$.

$$\text{non}(P) : \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) \neq y$$

$$\text{non}(Q) : \quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) \neq y.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Laquelle des deux assertions (P) ou (Q) est-elle vraie ? Justifier.

L'assertion (P) n'est pas vraie car, e.g., $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$, i.e., f n'est pas constante. Par contre l'assertion (Q) est vraie car pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $f(\sqrt{y}) = y$, donc f est surjective.

3. Même question avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.

Ni l'assertion (P) ni l'assertion (Q) n'est vraie. Comme $f(0) = 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, d'où la fonction f n'est pas une constante. Comme $|\sin x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, par exemple, $f^{-1}(2) = \emptyset$.

Exercice 2 Somme.

1. Soit $k \geq 1$, vérifier que $k^4 + 4 = (k^2 + 2k + 2)(k^2 - 2k + 2)$.

$$(k^2 + 2k + 2)(k^2 - 2k + 2) = (k^2 + 2)^2 - (2k)^2 = (k^4 + 4k^2 + 4) - 4k^2 = k^4 + 4.$$

2. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{k}{k^4 + 4} = \frac{a}{k^2 - 2k + 2} + \frac{b}{k^2 + 2k + 2}.$$

D'après la question précédente,

$$\frac{a}{k^2 - 2k + 2} + \frac{b}{k^2 + 2k + 2} = \frac{a(k^2 + 2k + 2) + b(k^2 - 2k + 2)}{k^4 + 4},$$

d'où $a(k^2 + 2k + 2) + b(k^2 - 2k + 2) = k$ pour tout $k \geq 1$. Par identification, on a

$$a + b = 0 \quad \text{et} \quad 2(a - b) = 1.$$

On en déduit que $a = \frac{1}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$.

3. En déduire la somme

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + 4}.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + 4} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2 - 2k + 2} - \frac{1}{k^2 + 2k + 2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)^2 + 1} - \frac{1}{(k+1)^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)^2 + 1} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2 + 1} = \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l^2 + 1}}_{l=k-1} - \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l^2 + 1}}_{l=k+1} \end{aligned}$$

d'où c'est une somme télescopique. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + 4} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2 + 1} - \frac{1}{(n+1)^2 + 1} \right)$$

Exercice 3 Images directes et réciproques.

Trouver les ensembles suivants. Justifier votre réponse.

1. Déterminer $f^{-1} \left(\left[\frac{1}{2}, +\infty \right) \right)$, avec $f : x \in [0, 2\pi] \mapsto \cos(x)$.

Comme $\text{Im}(f) = [-1, 1]$, $f^{-1} \left(\left[\frac{1}{2}, +\infty \right) \right) = f^{-1} \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right)$. On en déduit que $f^{-1} \left(\left[\frac{1}{2}, +\infty \right) \right) = \left[0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi \right]$

2. $f^{-1}([-\infty, 2])$, avec $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x + e^{-x}$;

Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Ceci est équivalent à l'équation $(e^x)^2 - y(e^x) + 1 = 0$ et que le discriminant de cette équation est $y^2 - 4$. Comme $e^x > 0$, on en déduit que $y \geq 2$ (car $y^2 - 4 \geq 0$). Donc la seule valeur possible est $y = 2$ et $e^x = 1$, d'où $f^{-1}([-\infty, 2]) = \{0\}$.

3. $f(\mathbb{R})$ avec $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - e^{-x}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Ceci est équivalent à l'équation $(e^x)^2 - y(e^x) - 1 = 0$ et que le discriminant de cette équation est $y^2 + 4$. Donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$, cette équation de e^x admet deux solutions; l'une strictement positive et l'autre strictement négative. On en déduit que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exercice 4 Injectivité et surjectivité.

1. Soient A, B et C ensembles, $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, g est surjective et si $g \circ f$ est injective, f est injective.

Le cas $g \circ f$: surjective. Par hypothèse, pour tout $c \in C$, il existe $a \in A$ tel que $c = (g \circ f)(a) = g(f(a))$, d'où posant $b = f(a)$, on obtient $g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a) = c$. Donc, g est surjective.

Le cas $f \circ g$: injective. Soient $a_1, a_2 \in A$ deux éléments vérifiant $f(a_1) = f(a_2)$. On a $(g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (g \circ f)(a_2)$. Par hypothèse, on en déduit que $a_1 = a_2$, i.e, f est injective.

2. Donner un exemple d'une application f

i) de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui est injective mais pas surjective.

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe un entier a et un entier $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $x = \frac{a}{b}$. Alors, $f(x) := (a, b)$ est une application injective, car une telle expression est unique pour chaque x , mais pas surjective car b est toujours positif.

ii) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ qui est surjective mais pas injective.

Pour $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, on définit l'application f par $f(m, n) = \frac{m}{|n| + 1}$ est une application surjective, car tout nombre rationnel admet une expression de la forme $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et $f(a, b - 1) = \frac{a}{b}$. Cette application n'est pas injective, car par exemple, $f(0, 1) = f(0, 2) = 0$.