6 Polynômes et fractions rationnelles

Dans toute la suite, $n \in \mathbb{N}$ et l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Définitions et opérations

Définition 6.1 (Polynôme). *Un polynôme d'**indéterminée X** (qui est un symbole formel pouvant être remplacé par un élément qui n'est pas dans $\mathbb{K}$), à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression pouvant s'écrire sous la forme*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

*(avec la convention $X^0 = 1$) où, $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $a_k \in \mathbb{K}$. P est alors la somme des **monômes** $\{a_k X^k\}_{k \in [\![0,n]\!]}$.*
*Les nombres $\{a_0, \ldots, a_n\}$ s'appellent les **coefficients** du polynôme P et on note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes d'indéterminée X à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
En particulier :

- *si $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $a_k = 0$, P est le polynôme nul noté $P(X) = 0$;*
- *si $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k = 0$, P est un polynôme constant, $P(X) = a_0$;*
- $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\forall \{a_k\}_{k \in [\![0,n]\!]} \subset \mathbb{K}$, $\forall \{b_k\}_{k \in [\![0,p]\!]} \subset \mathbb{K}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k \iff n = p \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!], a_k = b_k$.

Définition 6.2 (Opérations). *Soient $m, n \in \mathbb{N}$, $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, alors :*

1. *(Somme) Si $n \geq m$, $(P+Q)(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) X^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k X^k$.*
2. *(Produit) $(PQ)(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m+n} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0) X^k = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) X^k$.*
3. *(Composition) $(P \circ Q)(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (Q(X))^k$.*

Définition 6.3 (Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire). *Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ tel que $a_n \neq 0$.*
Alors :

- *l'entier n est appelé **degré** du polynôme P, noté $\deg(P) = n$, et on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n ;*
- *le coefficient a_n est appelé **coefficient dominant** de P, et si $a_n = 1$ on dit que P est un polynôme **unitaire**.*

Par convention, $\deg(0) = -\infty$ (pour que la règle du degré du produit ci-dessous reste vraie quand $P = 0$).

Proposition 6.4 (Degré de la somme et du produit). *Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, alors*

1. $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ *avec égalité en particulier si* $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
2. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ *et en particulier,* $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*$, $\deg(\alpha P) = \deg(P)$.

Proposition 6.5 (Produit nul). *Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $(PQ)(X) = 0 \iff P(X) = 0$ ou $Q(X) = 0$.*

6.2 Arithmétique sur les polynômes

Définition 6.6 (Multiple et diviseur). *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. On dit que B est un diviseur de A, ou que A est un multiple de B, lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A(X) = B(X)Q(X)$.*

Proposition 6.7 (Division euclidienne). *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple de polynômes $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ qui vérifient $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.*
On appelle Q le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Proposition 6.8 (PGCD et PPCM). *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$. Il existe un unique polynôme **unitaire** de plus grand degré qui divise à la fois A et B.*
Cet unique polynôme unitaire est appelé le plus grand commun diviseur de A et B, noté $\mathrm{PGCD}(A, B)$.
*Il existe aussi un unique polynôme **unitaire** M de plus petit degré tel que $A|M$ et $B|M$, appelé le plus petit commun multiple de A et B, noté $\mathrm{PPCM}(A, B)$.*

Remarque 6.9 (Propriétés du PGCD). Pour tout $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$, on a :

1. si $A|B$, alors $\mathrm{PGCD}(A, B) = \frac{1}{\lambda} A$ où $\lambda \neq 0$ est le coefficient dominant de A;
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\mathrm{PGCD}(\lambda A, B) = \mathrm{PGCD}(A, B)$;
3. comme pour les entiers, si R est le reste dans la division euclidienne de A par B, alors on a, comme en Arithmétique (dans $\mathbb{Z}$), $\mathrm{PGCD}(A, B) = \mathrm{PGCD}(B, R)$, ce qui justifie l'algorithme d'Euclide.

Définition 6.10. *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A et B sont premiers entre eux si $\mathrm{PGCD}(A, B) = 1$.*

Théorème 6.11 (Théorème de Bézout). *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$. Alors il existe deux polynômes $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = \mathrm{PGCD}(A, B)$.*

Corollaire 6.12. *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. A et B sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.*

Corollaire 6.13. *Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$. Si $C|A$ et $C|B$, alors $C|\mathrm{PGCD}(A, B)$.*
Si $A|C$ et $B|C$, alors $\mathrm{PPCM}(A, B)|C$.

Corollaire 6.14 (Lemme de Gauss). *Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Si $A|BC$ et $\mathrm{PGCD}(A, B) = 1$, alors $A|C$.*

6.3 Fonction polynomiale et dérivation des polynômes

Définition 6.15 (Fonction polynomiale). *Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle fonction polynomiale associée à P la fonction $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{K}$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.*
Quand on calcule $p(x)$ avec $x \in \mathbb{K}$, on dit que l'on évalue le polynôme $P(X)$ en x, et on note cette valeur $P(x)$.

Définition 6.16 (Polynôme dérivé). *Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme dérivé de P le polynôme $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.*
Soit $j \in \mathbb{N}^*$, on notera $P^{(j)} = (P^{(j-1)})'$ la j-ième dérivée du polynôme P, avec pour convention $P^{(0)} = P$.

Proposition 6.17 (Opérations sur les polynômes dérivés). *Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors*

- $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$
- $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

Proposition 6.18 (Degré du polynôme dérivé). *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$, sinon $P'(X) = 0$ et donc $\deg(P') = -\infty$.*

Proposition 6.19 (**Expression des polynômes dérivés successifs et formule de Taylor**).
Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ *de degré* n. *Alors :*

1. $\forall j \in \{0, ..., n\}$, $\deg(P^{(j)}) = n - j$ *et* $P^{(j)}(X) = \sum_{k=j}^{n} \frac{k!}{(k-j)!} a_k X^{k-j}$ *et* $\forall j \geq n+1$, $P^{(j)}(X) = 0$.

2. ***Formule de Taylor :*** $\forall x_0 \in \mathbb{K}$, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(X - x_0)^k$.

6.4 Racines d'un polynôme

Définition 6.20 (**Racine d'un polynôme**). *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $x_0 \in \mathbb{K}$. *On dit que* x_0 *est une racine (ou un zéro) du polynôme* P *si* $P(x_0) = 0$.

Proposition 6.21 (**Racines et divisibilité**). *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $x_0 \in \mathbb{K}$. *Alors :*

$$x_0 \text{ est racine de } P \iff X - x_0 \text{ divise } P.$$

Plus généralement, si $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $x_1, ..., x_m \in \mathbb{K}$ *sont deux-à-deux distincts, on a*

$$x_1, ..., x_m \text{ racines de } P \iff (X - x_1)(X - x_2)...(X - x_m) \text{ divise } P.$$

Proposition 6.22 (**Degré et nombre de racines distinctes**). *Tout polynôme de* $\mathbb{K}_n[X]$ *qui possède* $n+1$ *racines distinctes est le polynôme nul.*
De manière équivalente, tout polynôme non-nul de degré inférieur ou égal à n *admet au plus* n *racines distinctes.*

Définition 6.23 (**Ordre de multiplicité**). *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$, $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $x_0 \in \mathbb{K}$. *On dit que* x_0 *est une racine d'ordre de multiplicité (ou simplement "d'ordre", ou simplement "de multiplicité")* m *du polynôme* P *lorsque*

- $(X - x_0)^m$ *divise* P *;*
- $(X - x_0)^{m+1}$ *ne divise pas* P,

c'est-à-dire s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $P(X) = (X - x_0)^m Q(X)$ *et* $Q(x_0) \neq 0$.

Proposition 6.24 (**Multiplicité et dérivées successives**). *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *non-nul,* $x_0 \in \mathbb{K}$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$. *Le nombre* x_0 *est une racine de multiplicité* p *du polynôme* P *si et seulement si* $\forall k \in \{0, ..., m-1\}$, $P^{(k)}(x_0) = 0$ *et* $P^{(m)}(x_0) \neq 0$.

Proposition 6.25 (**Ordres de multiplicité et divisibilité**). *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$, $\ell \in \mathbb{N}^*$, $(m_1, ..., m_\ell) \in (\mathbb{N}^*)^\ell$ *et* $(x_1, ..., x_\ell) \in \mathbb{K}^\ell$ *deux-à-deux distincts. Alors :*

$$\begin{aligned}&(X - x_1)^{m_1}...(X - x_\ell)^{m_\ell} \text{ divise } P\\ \iff\ & x_1, ..., x_\ell \text{ sont des racines de } P \text{ de multiplicités respectives } \textbf{au moins } m_1, ..., m_\ell.\end{aligned}$$

Proposition 6.26 (**Nombre maximum de racines avec multiplicité**). *Un polynôme* $P \in \mathbb{K}_n[X]$ *non-nul admet au plus* n *racines, comptées avec leurs ordres de multiplicité.*

Définition 6.27 (**Polynôme scindé**). *On dit que* $P \in \mathbb{K}[X]$ *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *s'il n'est pas constant et peut s'écrire comme produit de polynômes de degré* 1, *c'est-à-dire s'il existe* $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ *tels que*

$$P(X) = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - x_k),$$

ou a_n *est le coefficient dominant de* P.

Proposition 6.28 (**Somme et produit des racines d'un polynôme scindé unitaire**). *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *défini par* $P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$ *un polynôme de degré* n, *scindé et unitaire, alors :*

- *le coefficients de* X^{n-1} *de* $P(X)$ *vaut* $-s$ *où* $s = x_1 + ... + x_n$ *;*
- *le coefficient constant de* $P(X)$ *vaut* $(-1)^n p$ *où* $p = x_1 ... x_n$.

Autrement dit,

$$P(X) = X^n - sX^{n-1} + ... + (-1)^n p.$$

6.5 Polynômes irréductibles et factorisation

Définition 6.29 (Polynômes irréductibles). *On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ s'il est non-constant et que ses seuls diviseurs sont les constantes non-nulles et les polynômes λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.*

Proposition 6.30 (Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$). *On a :*

1. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*
2. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 ayant un discriminant strictement négatif.*

Théorème 6.31 (Théorème de d'Alembert-Gauss et factorisation). *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leurs multiplicités.*
En notant a_n le coefficient dominant de $P \in \mathbb{C}[X]$, on peut écrire

$$P(X) = a_n \prod_{k=1}^{\ell} (X - x_k)^{m_k}$$

avec $\ell \in \mathbb{N}^*$, $(x_k)_{k \in [\![1,\ell]\!]} \subset \mathbb{C}$ des racines distinctes de P, $m_k \in \mathbb{N}^*$ leurs ordres de multiplicité et $\sum_{k=1}^{\ell} m_k = n$.
Autrement dit, tout polynôme non-constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Proposition 6.32 (Racines conjuguées). *Soit $z \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Si z est racine de P, alors $\overline{z}$ est également racine de P, avec le même ordre de multiplicité.*

Proposition 6.33 (Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$). *Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire comme produit d'un réel et de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.*

6.6 Fractions rationnelles

Définition 6.34 (Fraction rationnelle). *On appelle fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$ tout quotient de type $F = \dfrac{N}{D}$ avec $(N, D) \in \mathbb{K}[X]$ et $D \neq 0$. On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble de ces fractions rationnelles. On dit que $\dfrac{N}{D}$ est un représentant irréductible de F si $\mathrm{PGCD}(N, D) = 1$.*

Théorème 6.35 (Décomposition en éléments simples). *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F \neq 0$. Soit $\dfrac{N}{D}$ un représentant irréductible de F et soit $D = D_1^{p_1} \dots D_m^{p_m}$ la décomposition de D en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Alors on peut écrire de manière unique*

$$F(X) = \frac{N(X)}{D(X)} = E(X) + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p_i} \frac{A_{i,j}(X)}{D_i^j(X)} \right)$$

où E et les $(A_{i,j})_{i,j}$ sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg(A_{i,j}) < \deg(D_i)$. E s'appelle la partie entière de F et les quotients $\dfrac{A_{i,j}}{D_i^j}$ des éléments simples.