2.2 Méthodes de raisonnement

À partir de postulats et d'axiomes (propriétés supposées intrinsèquement vraies), on enrichit par une démarche hypothético-déductive la théorie de nouveaux résultats hiérarchisés selon des théorèmes, des propositions, des corollaires et des lemmes.

On dresse ci-après toute une liste de méthodes de raisonnement fondées sur la logique mathématique.

1. **Raisonnement direct (ou par déduction) :** si H et vraie et si l'implication $H \Rightarrow C$ est vraie, alors C est vraie, où H est l'hypothèse et C la conclusion.

2. **Raisonnement par disjonction de cas :** c'est un raisonnement direct dans lequel l'hypothèse H peut se décomposer en plusieurs autres hypothèses, par exemple quand on a l'équivalence $H \iff$ "H_1 ou H_2". Si $H_1 \Rightarrow C$ est $H_2 \Rightarrow C$ sont vraies, alors $H \Rightarrow C$ est vraie.

3. **Raisonnement par contraposition :** pour montrer que $H \Rightarrow C$, on montre (puisque les propositions sont équivalentes) que $\text{non}(C) \Rightarrow \text{non}(H)$.

4. **Raisonnement par l'absurde :** pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose sa négation vraie et l'on montre que cela vient contredire une proposition Q qui est vraie. Cela vient du fait que

$$P \iff (\text{non}(P) \Rightarrow Q) \text{ et } (\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q)).$$

5. **Raisonnement par contre-exemple :** pour montrer que la propriété "$\forall x \in A, P(x)$" est fausse, il suffit de trouver un $x_0 \in A$ pour lequel $P(x_0)$ est fausse. On dit que ce x_0 est un contre-exemple.

6. **Raisonnement par récurrence simple :** Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé, il suffit d'établir :

   - *Initialisation :* la propriété $P(n_0)$ est vraie;
   - *Hérédité :* $\forall n \geq n_0$ fixé tel que $P(n)$ soit vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

   On parlera de **récurrence double** quand la propriété est initialisée pour $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$, et que, pour tout entier $n \geq n_0$ fixé, "$P(n)$ et $P(n+1)$" vraie implique que $P(n+2)$ est vraie.

7. **Raisonnement par récurrence forte :** Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé, il suffit d'établir :

   - *Initialisation :* la propriété $P(n_0)$ est vraie;
   - *Hérédité :* soit $n \geq n_0$ fixé tel que $P(i)$ soit vraie pour tout $n_0 \leq i \leq n$, alors $P(n+1)$ est vraie.

8. **Raisonnement par analyse-synthèse :** Il se déroule en deux étapes :

   i) **l'analyse :** on raisonne sur une hypothétique solution au problème considéré et l'on accumule des déductions de propriétés qu'elle doit vérifier, du seul fait qu'elle est solution;

   ii) **la synthèse :** on examine tous les objets vérifiant les conditions nécessaires précédemment accumulées (ce sont les seuls candidats pouvant être des solutions) et l'on détermine, parmi eux, lesquels sont réellement des solutions au problème initial.