2 Logique et raisonnements

2.1 Eléments de logique binaire

La logique mathématique est la science du raisonnement. Elle permet d'élaborer des raisonnements par enchaînements d'affirmations selon un langage et des règles précises. Une affirmation mathématique :

- peut être appelée proposition, assertion, énoncé, etc. (cf. ci-dessous)
- dépendant d'une ou plusieurs variables est appelée formule mathématique ou prédicat.

Définition : explication sur la signification mathématique d'un mot/concept.
Théorème : un énoncé vrai très important.
Proposition : un énoncé vrai, moins important, mais néanmoins très intéressant.
Lemme : un énoncé vrai utilisé pour démontrer d'autres énoncés vrais (une sorte d'outil).
Corollaire : un énoncé vrai qui est simple déduction d'un théorème ou d'une proposition.
Démonstration/Preuve : établissement de la vérité d'un énoncé.
Conjecture : un énoncé que l'on pense être vrai, mais dont on n'a pas la démonstration.
Axiome : une supposition de base pour une situation mathématique.

Principes de la logique binaire :

1. une proposition mathématique doit prendre une valeur de vérité;
2. **(Principe du tiers exclu)** une proposition mathématique ne peut prendre que deux valeurs de vérité : la valeur vraie (V) ou la valeur fausse (F). Il n'y a donc pas de tierce possibilité.
3. **(Principe de non-contradiction)** une proposition mathématique ne peut pas être simultanément vraie et fausse.

Définition 2.1 (**Négation, conjonction et disjonction**). *On définit les propositions suivantes.*

- ***Négation :*** *Soit P une proposition, alors la négation de P, notée non(P) (ou $\neg P$), est la proposition dont les valeurs sont les contraires de celles de P.*

P	non(P)
V	F
F	V

- ***Conjonction :*** *Soient P et Q deux propositions. La conjonction de P et Q, notée "P et Q" (ou bien $P \wedge Q$), est la proposition qui n'est vraie que lorsque P et Q sont simultanément vraies.*

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- ***Disjonction :*** *Soient P et Q deux propositions. La disjonction de P et Q, notée "P ou Q" (ou bien $P \vee Q$), est la proposition qui est vraie lorsqu'au moins l'une des deux propositions est vraie.*

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque 2.2. On a que :

1. soit $n \in \mathbb{N}$, P :"n est un multiple de 2", Q :"n est un multiple de 3", alors P et Q : "n est un multiple de 6". On peut aussi écrire P :"$n \in 2\mathbb{Z}$", Q :"$n \in 3\mathbb{Z}$" et donc P et Q :"$n \in 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$". La conjonction est associée à **l'intersection** des ensembles.

2. soit $x \in \mathbb{R}$, P : "$x \geq 1$", Q :"$x \leq -1$", alors P ou Q : "$|x| \geq 1$". On peut aussi écrire P :"$x \in [1,+\infty[$", Q : "$x \in]-\infty,-1]$, ce qui donne P ou Q : "$x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$". La disjonction est associée à **l'union** des ensembles.

Proposition 2.3 (**Règles élémentaires**). *On a :*

1. ***(Tautologie)*** *La disjonction "P ou non(P)" est toujours vraie, c'est une tautologie.*

2. ***(Contradiction)*** *La conjonction "P et non(P)" est toujours fausse, c'est une contradiction.*

3. ***(Loi de De Morgan)*** *Soient P et Q deux propositions, alors :*

   a) *"non(P ou Q)" et "non(P) et non(Q)" ont les mêmes valeurs de vérité;*
   b) *"non(P et Q)" et "non(P) ou non(Q)" ont les mêmes valeurs de vérité.*

4. ***(Distributivité)*** *Soient P, Q et R trois propositions, alors :*

   a) *"(P ou Q) et R" et "(P et R) ou (Q et R)" ont les mêmes valeurs de vérité;*
   b) *"(P et Q) ou R" et "(P ou R) et (Q ou R)" ont les mêmes valeurs de vérité.*

Définition 2.4 (**Implication**). *Soient P et Q deux propositions. L'implication de P à Q, notée "$P \Rightarrow Q$" (se lit "P implique Q"), est la proposition qui n 'est fausse que lorsque P est vraie et Q est fausse.*
La réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors on dit que

- *P est une condition suffisante pour avoir Q ;*

- *Q est une condition nécessaire pour avoir P.*

Proposition 2.5 (**Propriétés de l'implication, contraposée**). *Soient P, Q et R trois propositions.*

1. ***(Implication comme disjonction)*** *"$P \Rightarrow Q$" et "non(P) ou Q" ont les mêmes valeurs de vérité.*

2. ***(Négation de l'implication)*** *La négation d'une implication $P \Rightarrow Q$ est la conjonction "P et non(Q)".*

3. ***(Contraposée)*** *"$P \Rightarrow Q$" et "non(Q) $\Rightarrow$ non (P)" ont les mêmes valeurs de vérité.*
   *La proposition "non(Q) $\Rightarrow$ non (P)" est appelée **contraposée** de "$P \Rightarrow Q$".*

4. ***(Transitivité)*** *Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ sont vraies, alors $P \Rightarrow R$ l'est aussi.*

Définition 2.6 (**Equivalence**). *Soient P et Q deux propositions. L'équivalence de P et Q, notée "$P \iff Q$ (se lit "P équivalent à Q") est la proposition qui n'est vraie que lorsque P et Q ont même valeur de vérité (soit simultanément vraies, soit simultanément fausses). Ainsi, "$P \iff Q$" est équivalente à la double implication "$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$".*

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Si $P \iff Q$ est vraie, on dit que P est une condition nécessaire et suffisante de Q : il faut et il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie. On dit aussi que P est vraie si et seulement si Q est vraie.

Définition 2.7 (**Quantificateurs universel/existentiel**). *On définit les notations suivantes :*

1. *L'expression "$\forall x \in A$" se lit "quelque soit x élément de A" ou bien "pour tout x appartenant à A".*
2. *L'expression "$\exists x \in A$" se lit "il existe (au moins) un élément x de A".*
3. *L'expression "$\exists! x \in A$" se lit "il existe un unique élément x de A".*

On a de plus, étant donnée $P(x)$ une propriété qui dépend d'une variable x,

- *La négation de "$\forall x \in A, P(x)$" est "$\exists x \in A, non(P(x))$".*
- *La négation de "$\exists x \in A, P(x)$" est "$\forall x \in A, non(P(x))$".*

En mathématiques, on utilise souvent des lettres des alphabets latins (a, b, c, etc.) et grecs (α, β,...). Pour ne pas être trop perdu et savoir comment ces lettres grecques se prononcent à l'oral, voici **l'alphabet grec :**

Ecriture latine de la lettre	**Majuscule**	**Minuscule**
alpha	A	α
beta	B	β
gamma	Γ	γ
delta	Δ	δ
epsilon	E	ϵ
zeta	Z	ζ
eta	H	η
theta	Θ	θ
iota	I	ι
kappa	K	κ
lambda	Λ	λ
mu	M	μ
nu	N	ν
xi	Ξ	ξ
omicron	O	o
pi	Π	π
rho	R	ρ
sigma	Σ	σ
tau	T	τ
upsilon	Υ	υ
phi	Φ	ϕ
chi	X	χ
psi	Ψ	ψ
omega	Ω	ω