1.2 Sommes, produits et identités

1.2.1 Définitions, propriétés et formules classiques

Définition 1.7 (Sommes et produits). *Soit $I \subset \mathbb{N}$ un ensemble fini et $(a_k)_{k\in I} \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des valeurs a_k quand k décrit I (une famille de réels), alors on note*

$$\sum_{k\in I} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{k\in I} a_k$$

la somme et le produit de tous les réels $(a_k)_{k\in I}$, avec pour convention que $\sum_{k\in\emptyset} a_k = 0$. De plus, si $p, n \in \mathbb{Z}$, $p \leq n$ et $I = [\![p,n]\!]$ (l'intervalle des entiers entre p et n), on note

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{n} a_i = a_p a_{p+1} \ldots a_n.$$

Notons que cette somme et ce produit ont $n-p+1$ termes.

Proposition 1.8. *Soit I un ensemble fini, $(a_k)_{k\in I}$ et $(b_k)_{k\in I}$ deux familles de réels, $p \leq n$ deux entiers naturels, $\lambda, q \in \mathbb{R}$, alors :*

1. *Linéarité :* $\sum_{k\in I}(a_k + \lambda b_k) = \sum_{k\in I} a_k + \lambda \sum_{k\in I} b_k$.
2. *Homogénéité :* $\prod_{k=p}^{n}(\lambda a_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} a_k$.
3. *Sommation d'une constante :* $\sum_{k=p}^{n} 1 = n-p+1$ *(c'est le nombre de termes de la somme).*
4. *Somme arithmétique :* $\sum_{k=p}^{n} k = \frac{(n-p+1)(n+p)}{2}$. *En particulier* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
5. *Somme géométrique :* $\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \left(= \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}\right)$.

Proposition 1.9. *Soient I et J deux ensembles finis et $(a_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ une famille de réels, alors*

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j} = \sum_{i\in I, j\in J} a_{i,j}.$$

De plus, si $a_{i,j} = \alpha_i \beta_j$ avec $(\alpha_i)_{i\in I}$ et $(\beta_j)_{j\in J}$ des suites réelles, alors

$$\left(\sum_{i\in I} \alpha_i\right)\left(\sum_{j\in J} \beta_j\right) = \sum_{i\in I, j\in J} \alpha_i \beta_j.$$

1.2.2 Sommes télescopiques

Lemme 1.10 (Changements d'indice). *Soit n et p deux entiers naturels, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $k \in \mathbb{Z}$. Alors, en posant $j = i+k$, on effectue un **changement d'indice par translation** :*

$$\sum_{i=p}^{n} u_{i+k} = \sum_{j=p+k}^{n+k} u_j.$$

*De plus, en posant $j = k-i$, on effectue un **changement d'indice par retournement** :*

$$\sum_{i=p}^{n} u_{k-i} = \sum_{j=k-n}^{k-p} u_j.$$

Proposition 1.11 (Télescopage). *Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$,*

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p.$$

1.2.3 Identités remarquables

Proposition 1.12 (Différence de puissances). *Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Proposition 1.13 (Carré d'une somme). *Pour toute famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels, avec I un ensemble fini, on a*

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)^2 = \sum_{i\in I} a_i^2 + \sum_{i,j\in I} a_i a_j = \sum_{i\in I} a_i^2 + 2\sum_{\substack{i<j \\ i,j\in I}} a_i a_j$$

Définition 1.14 (Factorielle, coefficient binomial). *On définit les quantités suivantes :*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ et on prend pour convention que $0! = 1$. Le nombre $n!$ avec $n \in \mathbb{N}$ est appelé **factorielle n**.*
- *Pour tout entiers naturels n et k tels que $k \leq n$, le **coefficient binomial** est défini par*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pour les autres valeurs de n et k, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Proposition 1.15 (Formule de Pascal et symétrie). *Pour tous entiers naturels n et k, non simultanément nuls, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

De plus, pour tous entiers naturels n et k tels que $n \geq k$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Proposition 1.16 (Binôme de Newton). *Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Remarque 1.17. Voici trois exemples de calculs que l'on devrait être capable de savoir faire à l'issue de ce cours (et après avoir traité les exercices en TD) :

- Calculer le nombre réel $A = 6 \times \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}{4-\frac{1}{3}}\right)^3 \times \frac{6^5}{8} \times (9^2)^{-2} \times \sqrt[3]{\sqrt{729}}} + \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$.
- Calculer $B = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{j}{k+1} + 2\binom{N}{k} - 2^k - \frac{N}{4} + \frac{1}{(k+2)(k+3)}\right)$.
- Factoriser $\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^4 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^4\right]^3 + \frac{1}{8}\left[\left(-x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$.