3.2 Applications entre ensembles

Définition 3.23 (**Application**). *Une application $f : E \to F$, $x \mapsto f(x)$, est la donnée :*

- *d'un ensemble de départ E,*
- *d'un ensemble d'arrivée F,*
- *d'une définition ou d'une formule associant à chaque élément $x \in E$ un unique élément $y = f(x) \in F$.*

De plus, on notera F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Définition 3.24 (**Images, antécédents**). *Soit $f : E \to F$ une application, alors :*

- *pour tout $x \in E$, on appelle image de x par f l'élément $y = f(x) \in F$.*
- *Si $A \subset E$, on note $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ l'image de A par f, c'est-à-dire l'ensemble des images des éléments de A par f. Si $A = E$, $f(E)$ s'appelle l'image de f.*
- *Si $y \in F$ est donné, alors on dit que $x \in E$ est un antécédent de y par f si $f(x) = y$.*
- *Si $B \subset F$, alors on note $f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$ l'image réciproque de B par f. Il s'agit de l'ensemble des antécédents (éventuellement vide) des éléments de B par f.*

Définition 3.25 (**Restriction, prolongement**). *Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. On appelle restriction de f à A l'application $f_{|A} : A \to F$ définie par $f_{|A}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.*
On suppose $f : A \to F$ et $A \subset E$ donnés. On appelle prolongement de f à E une application $g : E \to F$ telle que $g_{|A} = f$ c'est-à-dire coïncidant sur A avec f.

Remarque 3.26 (**Application ou fonction?**). En Analyse, on parlera surtout de fonctions, et peu d'applications. La distinction est la suivante : $f : E \to F$ est

- une fonction si chaque élément de E admet une ou aucune image par f ;
- une application si chaque élément de E admet une image par f.

Il faut donc restreindre f à son ensemble de définition $D_f \subset E$ pour que $f : D_f \to F$ soit une application.

Proposition 3.27 (**Images directes/réciproques et opérations**). *Soit $f : E \to F$, $A, B \in \mathscr{P}(E)$ et $C, D \in \mathscr{P}(F)$, alors :*

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$;
2. $\cancel{f(E \setminus A) = F \setminus f(A)}$;
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
4. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
5. $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$;
6. $\cancel{f^{-1}(F \setminus C) = E \setminus f^{-1}(C)}$;
7. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;
8. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Définition 3.28 (**Injectivité**). *On dit que l'application $f : E \to F$ est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent par f, c'est-à-dire si*

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Remarque 3.29 (**Application non-injective**). On dit que $f : E \to F$ n'est pas injective si

$$\exists (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x',$$

autrement dit si deux éléments distincts de E ont même image par f.

Définition 3.30 (Surjectivité). *On dit que l'application $f : E \to F$ est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f, c'est-à-dire si*

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

Remarque 3.31 (Application non-surjective). On dit que $f : E \to F$ n'est pas surjective si

$$\exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad y \neq f(x),$$

c'est-à-dire si au moins un élément de F n'admet pas d'antécédent par f.

Définition 3.32 (Bijectivité). *On dit que l'application $f : E \to F$ est bijective si tout élément de F admet un unique antécédent par f, c'est-à-dire si*

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad y = f(x),$$

c'est-à-dire si f est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, f admet une application réciproque $f^{-1} : F \to E$, $x \mapsto f^{-1}(y)$ et on dit que E et F son equipotents.

Remarque 3.33 (Image réciproque vs. application réciproque). Attention : ne pas confondre l'image réciproque $f^{-1}(B)$ d'un ensemble B (qui a toujours un sens !) et l'application réciproque f^{-1} qui n'a de sens QUE si l'application f est bijective !

Définition 3.34 (Composition). *Soient $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux applications telles que $f(E) \subset G$. La composée de f par g est l'application notée $g \circ f : E \to H$ et définie pour tout $x \in E$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Remarque 3.35 (Ensembles de départ et d'arrivée). Pour que $g \circ f$ existe, il faut nécessairement que, pour tout $x \in E$, $f(x)$ soit dans l'ensemble de départ de g, sinon on ne peut pas calculer $g(f(x))$. Il faudra donc toujours vérifier que $f(E) \subset G$. Parfois, on aura $F = G$, ce qui permettra directement de conclure l'existence de cette composée, puisque $f(E) \subset F$.

Remarque 3.36 (Non-commutativité de la composition). Si $f : E \to E$ et $g : E \to E$ sont des applications, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ existent mais sont en général différentes (la composition n'est pas une opération commutative).

Proposition 3.37 (Associativité de la composition). *Soient $f : E \to E'$, $g : F \to F'$ et $h : G \to G'$ des applications telles que $f(E) \subset F$ et $g(F) \subset G$. Alors on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ donnée par $x \mapsto h(g(f(x)))$ et notée $h \circ g \circ f$.*

Définition 3.38 (Identité sur un ensemble). *Soit E un ensemble, on note $\mathrm{Id}_E : E \to E$, $x \mapsto x$ l'application identité de E.*

Proposition 3.39 (Lien entre application, réciproque et identité). *Si $f : E \to F$ est une bijection, alors l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ satisfait :*

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F.$$

Proposition 3.40 (Inverse d'une composée de bijections). *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des bijections, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Remarque 3.41 (Dénombrabilité (hors programme)). Nous énonçons ici quelques faits intéressants concernant la dénombrabilité :

1. On dit qu'un ensemble A est dénombrable s'il est équipotent à une partie (finie ou infinie) de $\mathbb{N}$.
2. Deux ensembles finis équipotents ont même cardinal.
3. Si E et F sont dénombrables, alors $E \times F$ est dénombrable.
4. Les ensembles $\mathbb{N}^k, \mathbb{Z}^k, \mathbb{D}^k$ et $\mathbb{Q}^k$ sont dénombrables pour tout entier $k \geq 1$.
5. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
6. Soit E un ensemble, alors E et $\mathscr{P}(E)$ ne sont jamais équipotents.
7. Les ensembles $[a, b]$, avec $a < b$, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas dénombrables.