1 Calculs algébriques dans $\mathbb{R}$

1.1 Ensembles de nombres et règles de calculs

Dans tout ce chapitre, le terme “ensemble" signifiera “ensemble de nombres réels".

Définition 1.1 (**Généralités**). *On dira qu'un ensemble E est vide, noté $E = \emptyset$, s'il ne contient aucun élément. Si E et F sont deux ensembles non-vides, on dit que :*

1. ***(appartenance)*** *x appartient à E, noté $x \in E$, si x est un des éléments de E.*

2. ***(inclusion)*** *E est inclus dans F, noté $E \subset F$, si tous les éléments de E appartiennent à F. On dit aussi que E est un sous-ensemble, ou une partie, de F.*
   De plus, dans ce cas, on note $F \backslash E$ désigne l'ensemble des éléments de F qui n'appartiennent pas à E (on reverra cette notion dans le chapitre sur les ensembles).

3. ***(famille, suite)*** *On note $(a_k)_{k \in I} \subset \mathbb{R}$ une famille de réels indexée par un ensemble I, c'est-à-dire que $a_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in I$. Quand $I \subset \mathbb{N}$ est infini, il s'agit d'une suite de réels.*

4. ***(opération)*** *si $*$ est une opération (par exemple l'addition ou la multiplication),*
   - *on dit que E est stable par $*$ si, pour tout $x \in E$ et $y \in E$, $x * y \in E$.*
   - *on dit que $*$ est commutative si E est stable pour cette opération et que, pour tout $x, y \in E$, $x*y = y*x$.*
   - *on appelle élément neutre e de E pour $*$ un nombre $e \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, $x * e = e * x = x$.*
   - *si $*$ est cummutative d'élément neutre e, $\tilde{x} \in E$ est l'inverse de $x \in E$ si $x * \tilde{x} = \tilde{x} * x = e$.*

Remarque 1.2. Les opérations $+$ et $\times$ sont commutatives, d'éléments neutres respectivement 0 et 1, et on parle habituellement d'opposé (pour $+$) et d'inverse (pour $\times$). De plus, $\times$ est distributive par rapport à $+$: pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x(y+z) = xy + xz$.

En terme de notation, si E est un ensemble de nombres, on écrira $\{x \in E : P(x)\}$ l'ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété P.

Mis à part $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, les ensembles définis ci-dessous $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sont stables par $+$ et $\times$.

Notation	**Nom**	**Définition**	**Opposé (général)**	**Inverse (général)**
$\mathbb{N}$	entiers naturels	$\{0, 1, 2, ...\}$	Non	Non
$\mathbb{Z}$	entiers relatifs	$\{...., -1, 0, 1, 2, ...\}$	$-n$	Non
$\mathbb{D}$	décimaux	$\{n \cdot 10^{-k} : n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$	$-n \cdot 10^{-k}$	Non
$\mathbb{Q}$	rationnels	$\left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$	$-\frac{a}{b}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$
$\mathbb{R}$	réels	“toutes les quantités"	$-x$	$x^{-1} = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	irrationnels	les réels non-rationnels	$-x$	$x^{-1} = \frac{1}{x}$

Remarque 1.3. Quelques précisions :

- Un nombre réel peut avoir plusieures écritures : $0.5 = 5 \cdot 10^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = \ln(e^{0.5}) = ...$

- Les décimaux sont les nombres qui possède une écriture avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Par exemple, on a $0.99999999... = 1 \in \mathbb{D}$.

- Les nombres réels peuvent être vus comme l'ensemble des limites de suites de rationnels ou d'irrationnels. On dit alors que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont "denses" dans $\mathbb{R}$. Entre deux réels distincts, il y a toujours un rationnel et un irrationnel (une infinité en fait).

Définition 1.4. *Si E est un des ensembles de nombres ci-dessus , on notera alors :*

1. $E_- = \{x \in E : x \leq 0\}$, *par exemple* $\mathbb{Z}_- = \{....-2,-1,0\}$ *et* $E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$, *par exemple* $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,...\} = \mathbb{N}$.
2. $E^* = \{x \in E : x \neq 0\}$, *par exemple* $\mathbb{Q}^*$ *est l'ensemble des rationnels non-nuls.*
3. $E_-^* = \{x \in E : x < 0\}$ *et* $E_+^* = \{x \in E : x > 0\}$, *par exemple* $\mathbb{R}_-^* =]-\infty,0[$ *et* $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$.
4. $aE+b = \{ax+b : x \in E\}$, *où a et b sont des réels, par exemple* $2\mathbb{Z}$ *est l'ensemble des nombres pairs et* $2\mathbb{Z}+1$ *celui des nombres impairs.*

Proposition 1.5 (**Puissances, racines**). *On rappelle que :*

1. *La quantité a^b existe si :*
   - $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{N}$ *et on a* $a^b = a \times .... \times a$, *où a apparaît b fois, avec pour convention que* $a^0 = 1$,
   - $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $b \in \mathbb{Z}_-$ *et on a* $a^b = a^{-1} \times ... \times a^{-1}$, *où* a^{-1} *apparaît b fois,*
   - $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *et s'écrit* $a^b = e^{b \ln a}$.
2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la racine n-ième d'un nombre réel $x \geq 0$ se note $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ de telle sorte que $\sqrt[n]{x}^n = x$. On rappelle la convention définissant la racine carrée :* $\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$.

Remarque 1.6. On a :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$;
- pour tout $x \geq 0$, $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

On rappelle maintenant les règles élémentaires des opérations sur les réels, avec $a,b,c,d,\alpha,\beta,n,p,x,y$ réels tels que les quantités suivantes aient un sens :

	Fractions	**Puissances**	**Racines n-ièmes**
Somme	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	Binôme de Newton (cf. après)	$\sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$
Produit	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$	$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$
Quotient	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$, $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$	$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$