3 Ensembles et applications

3.1 Bases de la théorie des ensembles

On part ici d'une définition intuitive et peu formelle de la notion d'ensemble : c'est une collection d'objets mathématiques. Traditionnellement, on essaie de noter les ensembles par des lettres majuscules et leurs éléments avec des lettres minuscules.

Définition 3.1 (**Appartenance**). *Si un objet x est dans un ensemble E, on note $x \in E$ et on dit que "x appartient à E". Sa négation "x n'appartient pas à E" s'écrit $x \notin E$.*

Définition 3.2 (**Extentionnalité**). *Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments :*

$$E = F \iff \forall x, \quad (x \in E \iff x \in F).$$

Remarque 3.3. Cela signifie que la caractéristique qui définit un ensemble, ce sont ses éléments. Autrement dit, si on voit les ensembles comme des sacs contenant des objets, le sac n'a aucune caractéristique qui puisse le distinguer d'un autre.

Définition 3.4 (**Ensemble vide**). *On note $\emptyset$ l'ensemble vide, c'est l'ensemble qui ne contient aucun élément.*

Définition 3.5 (**Définition d'un ensemble en extension**). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etant donnés des objets mathématiques $x_1, \dots, x_n$, on note $\{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble contenant exactement ces objets.*

Définition 3.6 (**Définition d'un ensemble en compréhension**). *Pour tout ensemble E et toute proposition P, on note $\{x \in E : P(x)\}$ l'ensemble dont les éléments sont exactement les éléments de E qui vérifient P.*
Pour tout ensemble E et toute expression $e[x]$ contenant une variable x, on note $\{e[x] : x \in E\}$ l'ensemble des objets mathématiques qui s'écrivent sous la forme $e[x]$ avec $x \in E$.

Définition 3.7 (**Ensemble fini, infini et cardinal**). *Lorsqu'un ensemble E admet un nombre fini d'éléments, ce nombre d'éléments est appelé le cardinal de E, noté* $\mathrm{Card}(E)$, $|E|$ *ou* $\#E$.
Lorsque E est infini, on pose $\mathrm{Card}(E) = +\infty$.

Définition 3.8 (**Inclusion et parties d'un ensemble**). *Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F, et on note $E \subset F$, si tout élément de E est aussi un élément de F, c'est-à-dire*

$$(\forall x \in E, \quad x \in F) \quad \textit{que l'on écrit aussi} \quad (\forall x, \quad x \in E \Rightarrow x \in F).$$

Si $E \subset F$, on dit que E est une partie (ou un sous-ensemble) de F. L'ensemble des parties d'un ensemble F est noté $\mathscr{P}(F)$. Ainsi, pour tout ensemble E, on a $E \in \mathscr{P}(F) \iff E \subset F$.

Remarque 3.9. Pour tout ensemble E, on a $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$. De plus, pour dire que x est un élément de l'ensemble E, on peut écrire :

$$x \in E, \quad \{x\} \subset E, \quad \text{ou} \quad \{x\} \in \mathscr{P}(E). \quad \text{(la première est à privilégier !)}$$

Proposition 3.10 (**Transitivité de l'inclusion et égalité d'ensembles**). *Soient E, F et G trois ensembles. Si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.*
De plus, on a $E = F \iff E \subset F$ et *$F \subset E$.*

Définition 3.11 (**Union et intersection d'ensembles**). *Soit E un ensemble et A, B des parties de E.*

1. *On appelle **réunion** de A et B, notée $A \cup B$, l'ensemble dont les éléments sont exactement ceux qui sont dans A ou dans B, autrement dit,*

$$\forall x \in E, \quad x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B.$$

2. *On appelle **intersection** de A et B, notée $A \cap B$, l'ensemble dont les éléments sont exactement ceux qui sont à la fois dans A et dans B, autrement dit,*

$$\forall x \in E, \quad x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B.$$

Proposition 3.12 (**Propriétés de bases de l'union et de l'intersection**)**.** *Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.*

1. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup E = E$ *et* $A \cap E = A$.
2. $\cup$ *et* $\cap$ *sont associatives :* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ *et* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.
3. $\cup$ *et* $\cap$ *sont commutatives :* $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$.
4. *On a toujours* $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ *et* $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.

Définition 3.13 (**Ensembles disjoints**)**.** *On dit que deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$.*

Définition 3.14 (**Famille d'ensembles**)**.** *Soit I un ensemble et, pour tout $i \in I$, A_i un ensemble. Alors $(A_i)_{i \in I}$ est appelée famille d'ensembles indexée par I. Quand I est un ensemble fini (resp. infini), on dit que la famille est finie (resp. infinie).*

Définition 3.15 (**Généralisation à des familles d'ensembles**)**.** *Soit I un ensemble, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E, alors on note respectivement $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$ la réunion et l'intersection de ces ensembles et on a*

$$\forall x \in E, \quad x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i;$$
$$\forall x \in E, \quad x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i.$$

Proposition 3.16 (**Distributivité**)**.** *Soit I un ensemble, $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles et B un ensemble, alors*

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B) \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B).$$

Définition 3.17 (**Différence d'ensembles et complémentaire**)**.** *Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. On appelle différence de B et A (ou B privé de A, ou B moins A) l'ensemble noté $B \setminus A$ (ou $B - A$) tel que, pour tout $x \in E$, $x \in B$ et $x \notin A$.*
On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble $A^c = E \setminus A$.

Remarque 3.18. On note que, quand E est un ensemble fini et $A, B \in \mathscr{P}(E)$, $\mathrm{Card}(A^c) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$ et $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$. De plus, on a de manière générale que $B \setminus A = B \cap A^c$, $(A^c)^c = A$, $A \cup A^c = E$ et $A \cap A^c = \emptyset$.

Proposition 3.19 (**Lois de De Morgan**)**.** *Soit E et I des ensembles et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. Alors*

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

Définition 3.20 (**Recouvrement, partition**)**.** *Soit E, A et I des ensembles et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. Alors on dit que*

1. $(A_i)_{i \in I}$ *est un recouvrement de A si* $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$;
2. $(A_i)_{i \in I}$ *est une partition de A si* $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ *et* $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

Définition 3.21 (**Produit cartésien**)**.** *Soient E et F deux ensembles. On admet que l'on peut construire un ensemble noté $E \times F$, appelé produit cartésien de E et F, dont les éléments sont les couples (x_1, x_2) avec $x_1 \in E$ et $x_2 \in F$ et tels que,*

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E \times F, \quad (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \iff x_1 = y_1 \quad \text{et} \quad x_2 = y_2.$$

Soit $n \geq 3$ un entier, on définit de même le produit cartésien de n ensembles $E_1, ..., E_n$, noté $E_1 \times ... \times E_n$ formé des n-uplets $(x_1, ..., x_n)$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Si ces n ensembles sont égaux à E, on note ce produit E^n.

Proposition 3.22. *Soient A et B deux ensembles finis, alors* $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A)\mathrm{Card}(B)$.