4 Nombres complexes

4.1 Construction de $\mathbb{C}$: l'idée de Hamilton (hors programme)

Comme celle de n'importe quel concept mathématique, l'histoire des nombres complexes est longue et tortueuse (résolution d'équations de degré 3 par Cardan en 1545 – volée à Tartaglia qui la tenait de del Ferro en 1515 –, règles de calcul par Bombelli en 1572, extraction de racines n-ièmes par de Moivre en 1706, lien avec l'exponentielle et notation i par Euler vers 1740, Théorème fondamental de l'Algèbre par Gauss en 1799). Le mathématicien irlandais Hamilton (1805-1965) eut l'idée de définir deux opérations $\oplus$ et $\otimes$ sur $\mathbb{R}^2$, de manière à créer l'ensemble $(\mathbb{C}, \oplus, \otimes)$ des nombres complexes :

- $\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \oplus (a',b') = (a+a', b+b')$;
- $\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \otimes (a',b') = (aa'-bb', ab'+a'b)$.

Il est facile de montrer que

- ces opérations sont commutatives et associatives;
- $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$;
- pour $\oplus$, l'élément neutre est $(0,0)$ et l'opposé (l'inverse pour $\oplus$) de (a,b) est $(-a,-b)$;
- pour $\otimes$, l'élément neutre est $(1,0)$ et l'inverse de (a,b) est $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$;
- $(\mathbb{R},+,\times)$ peut être identifié à $A = \{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$ muni des opérations $\oplus$ et $\otimes$;
- en notant $i = (0,1)$, on a $i^2 = i \otimes i = (0,1) \otimes (0,1) = (-1,0)$ qui peut être donc identifié à -1 ;
- de plus, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $(b,0) \otimes (0,1) = (0,b)$ peut-être vu comme ib et $(a,b) = (a,0) \oplus (0,b)$ peut donc être noté $a+ib$.

4.2 Définitions et premières propriétés

Définition 4.1 (**Nombres complexes**). *On définit l'ensemble des nombres complexes par* $\mathbb{C} := \{a+ib : (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ *avec* $i^2 = -1$ *défini par la règle ci-dessus. Si* $z = a+ib \in \mathbb{C}$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R}$*, alors*

- *a est appelée la partie réelle de z, notée* $\mathrm{Re}(z) = a$,
- *b est appelée la partie imaginaire de z, notée* $\mathrm{Im}(z) = b$.

Si $a = 0$ et $b \in \mathbb{R}^*$, on dit que $z = ib$ est imaginaire pur et on note $i\mathbb{R}$ l'ensemble de ces nombres.

Définition 4.2 (**Opérations**). *On a les opérations suivantes, pour $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$, avec $(a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4$:*

- $z+z' = a+a'+i(b+b')$;
- $zz' = aa'-bb'+i(ab'+a'b)$;
- *si* $z \neq 0$, *alors* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$

Définition 4.3 (**Conjugué**). *Le conjugué d'un nombre complexe $z = a+ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, est $\overline{z} = a-ib$.*

Proposition 4.4 (**Propriétés de la conjugaison**). *On a :*

1. $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\overline{z+z'} : \overline{z}+\overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.
2. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
3. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.
4. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = -\overline{z} \iff z \in i\mathbb{R}$.
5. $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*$, $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

4.3 Interprétation géométrique, module, argument et forme trigonométrique

Définition 4.5 (**Repère d'Argand, affixe, coordonnées polaires et cartésiennes, module et argument**). *On munit $\mathbb{R}^2$ du repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Alors tout nombre complexe $z = a + ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, peut être représenté par le point $M(a,b)$ où les réels a et b sont appelés coordonnées cartésiennes de M. Quand on veut rester dans le vocabulaire des nombres complexes, on dit que M est le point d'affixe z et on le note $M(z)$. Cela définit le plan complexe, aussi appelé plan d'Argand (ou Argand-Cauchy/Gauss). Les axes $(O;\vec{u})$ et $(O;\vec{v})$ sont appelés respectivement axes des réels et des imaginaires.*
Le point M peut être également repéré par la donnée de la distance $r = OM$ et une mesure $\theta \in [0,2\pi[$ de l'angle orienté dans le sens direct $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)$. Ce sont les coordonnées polaires de M, notées $M(r,\theta)$. Dans le langage des nombres complexes, on définit :

- *le module de $z = a + ib \in \mathbb{C}$ le nombre $|z| = r = OM = \sqrt{a^2+b^2}$. Si $z = a \in \mathbb{R}$, alors $|z| = |a|$ correspond à la valeur absolue de a.*
- *un argument θ de $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$, noté $\arg(z)$, en remarquant que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2k\pi$ est aussi un argument de z.*

Proposition 4.6 (**Symétries**). *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

- *$M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.*
- *$M(z)$ et $M''(-z)$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère.*

Proposition 4.7 (**Propriétés du module**). *On a les propriétés suivantes :*

1. *$\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \in \mathbb{R}_+$;*
2. *$\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 0 \iff z = 0$;*
3. *$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $|zz'| = |z||z'|$;*
4. *$\forall z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in C$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$;*
5. *$\forall z \in \mathbb{C}$, $|\overline{z}| = |z|$;*
6. *$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $|z+z'| \le |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $z' = \lambda z$.*

Proposition 4.8 (**Lien entre module et arguments**). *Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $r = |z|$ sont module et $\theta = \arg(z)$ un argument de z, alors*

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta.$$

Définition 4.9 (**Formes trigonométrique et exponentielles**). *Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'écriture $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$, avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ un argument de z, s'appelle la forme trigonométrique de z.*
On note $e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$ l'exponentielle complexe et l'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée forme exponentielle de z.

Proposition 4.10 (**Propriétés de l'exponentielle complexe et de l'argument**). *On a :*

1. *$\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$;*
2. *$\forall\theta,\theta' \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \theta' + 2k\pi$;*
3. *$\forall\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}$, $e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta}$, $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$;*
4. *$\forall\theta,\theta' \in \mathbb{R}$, $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$, $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$;*
5. *$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$, et si $z' \neq 0$, $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$;*
6. *(**Formules d'Euler**) $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$;*
7. *(**Formule de Moivre**) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, c'est-à-dire $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.*

Proposition 4.11 (**Angle, alignement et orthogonalité**). *Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points du plan complexe, alors $\widehat{BAC} = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ et :*

1. *A, B et C alignés $\iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.*
2. *$(AB)\perp(AC) \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.*

4.4 Applications en trigonométrie

Les formule précédentes permettent de retrouver facilement les identités trigonométriques suivantes :

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ (partie réelle de $e^{i(a+b)}$) ;
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ (partie imaginaire de $e^{i(a+b)}$).

On peut appliquer les formules d'Euler et Moivre aux deux procédés suivants :

1. **La linéarisation :** on transforme des produits du type $f(\cos x, \sin x)$ en sommes de $\cos kx$ et $\sin \ell x$. Par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x \cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{3ix} - e^{-3ix} + e^{ix} - e^{-ix}}{8i} = \frac{2i\sin(3x) + 2i\sin x}{8i} = \frac{\sin(3x) + \sin(x)}{4}.$$

   On utilise donc la formule d'Euler (dans les deux sens) et celle du binôme de Newton.

2. **La polynomialisation :** on transforme des expressions du type $g(\cos k_1 x, \dots \cos k_n x, \sin \ell_1 x, \dots, \sin \ell_m x)$ en polynômes à base de $\cos x$ et $\sin x$. Par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \mathrm{Re}\left(e^{i4x}\right) = \mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)^4\right) = \mathrm{Re}\left(8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 8i\sin x\cos^3 x - 4i\sin x\cos x + 1\right)\\ &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.\end{aligned}$$

   On utilise donc la formule de Moivre et celle du binôme de Newton.

4.5 Racines n-ièmes, racines carrées et équation de degré 2

Proposition 4.12 (Racines n-ièmes d'un complexe). *Soit $n \geq 2$ un entier et $w \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Alors w admet exactement n racines n-ièmes, solutions $\{z_0, \dots, z_{n-1}\}$ de l'équation $z^n = w$, et données par la formule*

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}\right)}$$

On parle de racine n-ième de l'unité pour les n solutions de l'équation $z^n = 1$.

Proposition 4.13 (Racine carrée par les formes algébriques). *Soit $w \in \mathbb{C}$, alors pour déterminer les deux racines carrées de w, c'est-à-dire résoudre l'équation $z^2 = w$, en notant $z = x + iy$ et $w = a + ib$, on résout :*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Proposition 4.14 (Equation du 2nd degré à coefficients complexes). *Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. On note δ et $-\delta$ les deux racines carrées de Δ. Alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$:*

- *une racine double $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$, et on peut écrire $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$;*
- *deux racines distinctes $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ si $\Delta \neq 0$, et on peut écrire $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.*

De plus, si a, b et c sont réelles, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- *dans $\mathbb{C}$, deux racines (une double ou deux distinctes), données par les formules précédentes, en remarquant que si $\Delta < 0$, alors $\delta = i\sqrt{|\Delta|}$;*
- *dans $\mathbb{R}$, une racine double $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$, aucune racine si $\Delta < 0$ et deux racines distinctes z_1, z_2 données par les formules précédentes avec $\delta = \sqrt{\Delta}$ si $\Delta > 0$.*

Théorème 4.15 (Théorème fondamental de l'Algèbre). *Soit $n \geq 1$ un entier, $\{a_0, ..., a_n\}$ des nombres complexes avec $a_n \neq 0$. Toute équation polynomiale d'inconnue z de la forme*

$$a_n z^n + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

admet exactement n solutions dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur multiplicité. Il existe ainsi n nombres complexes $z_1, ..., z_n$ (dont certains sont éventuellement confondus) tels que $a_n z^n + ... + a_1 z_1 + a_0 = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$.

4.6 Ensembles de points et transformations du plan

Définition 4.16 (Affixe et longueur d'un vecteur). *Soient $z_A, z_B \in \mathbb{C}$, $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$, et on note $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$. De plus, la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $AB = |z_B - z_A|$ et le milieu du segments $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.*

Proposition 4.17 (Linéarité et droite). *Soient $z_u, z_v \in \mathbb{C}$, $\overrightarrow{u}(z_u)$ et $\overrightarrow{v}(z_v)$ deux vecteurs, alors $\overrightarrow{u+v}(z_u + z_v)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur λu a pour affixe λz_u.*
Soit $A(z_A)$ avec $z_A \in \mathbb{C}$. La droite passant par A et de vecteur directeur u est donnée par les affixes $\{z_A + \lambda z_u : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
En particulier, si $B(z_B)$ avec $z_B \in \mathbb{C}$, l'ensemble des affixes des points de la droite (AB) est $\{z_A + \lambda(z_B - z_A) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. La droite horizontale (resp. verticale) d'ordonnée y_0 (resp. d'abscisse x_0) est donnée par l'ensemble des nombres complexes $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = y_0\}$ (resp. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = x_0\}$). Ces droites partagent le plan en demi-plans.

Proposition 4.18 (Translation). *Soit $\overrightarrow{u}(z_u)$, alors la translation $t_{\overrightarrow{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $M \mapsto t_{\overrightarrow{u}}(M) = M'$ telle que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ est donnée par l'application complexe $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto T(z) = z + z_u$.*

Proposition 4.19 (Homothétie et symétrie centrale). *Soit $k \in \mathbb{R}^*$ et $\Omega(z_\Omega)$, $z_\Omega \in \mathbb{C}$, alors l'homothétie de centre Ω et de rapport k $h_{\Omega,k} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $M \mapsto h_{\Omega,k}(M) = M'$ telle que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ est donnée par l'application complexe $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto H(z) = k(z - z_\Omega) + z_\Omega$. Son unique point fixe, c'est-à-dire vérifiant $H(z) = z$, est $z = z_\Omega$. Si $k = -1$, il s'agit d'une symétrie de centre Ω.*

Proposition 4.20 (Cercle et disque). *Soit $R > 0$ et $\Omega(z_\Omega)$, $z_\Omega \in \mathbb{C}$, alors :*

1. *$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_\Omega| \leq R\}$ est l'ensemble des affixes des points du disque centré en Ω et de rayon R.*
2. *$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_\Omega| = R\}$ est l'ensemble des affixes des points du cercle centré en Ω et de rayon R.*
3. *$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_\Omega| < R\}$ est l'ensemble des affixes des points de l'intérieur du disque centré en Ω et de rayon R.*
4. *$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_\Omega| > R\}$ est l'ensemble des affixes des points de l'extérieur du disque centré en Ω et de rayon R.*

Proposition 4.21 (Rotation et multiplication par l'exponentielle complexe). *Soit $\Omega(z_\Omega)$, $z_\Omega \in \mathbb{C}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la rotation de centre Ω et d'angle α, donnée par $r_{\Omega,\alpha} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $M \mapsto r_{\Omega,\alpha}(M) = M'$ telle que $\Omega M = \Omega M'$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \alpha$ est donnée par l'application $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto R(z) = e^{i\alpha}(z - z_\Omega) + z_\Omega$. Son unique point fixe, c'est-à-dire vérifiant $R(z) = z$, est z_Ω.*
En particulier, multiplier un nombre complexe z, affixe d'un point M, par $e^{i\alpha}$, c'est obtenir l'image de M par la rotation centrée en 0 et d'angle α.