Examen Blanc Algèbre 1 Info – UE MAT1074L

Licence Maths-Info année 2025-2026, Université Claude Bernard Lyon 1

Exercice 1

1. Déterminer les racines carrées de $9+40\,i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $i\,z^2+(1-5\,i)z-2+6\,i=0$.

Exercice 2

1. Calculer le module et un argument de $1-i$ et de $3i$ et les mettre sous forme exponentielle.
2. Calculer les parties réelle et imaginaire de $(1-3i)^2-24i(1+i)$.
3. Déterminer les racines de l'équation suivante :
$$(1+i)z^2+(1-3i)z+6i=0.$$
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation
$$(1+i)z^6+(1-3i)z^3+6i=0.$$

Exercice 3

1. En raisonnant par l'absurde, démontrer : $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\},\ \dfrac{1+x}{2x-1}\neq\dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que l'application $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x)=\dfrac{1+x}{2x-1}$ est bijective en exhibant son application réciproque.

Exercice 4
On considère deux ensembles A, B et leurs ensembles de parties $\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)$.

1. Calculez $\mathcal{P}(A)$ pour l'ensemble $A = \{\heartsuit, a, 2\}$.
2. Si A a 5 éléments, combien d'éléments a $\mathcal{P}(A)$, et combien d'éléments a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$?
3. Démontrez: $A \subset B \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

Exercice 5
On considère les entiers suivants : $a = 15n + 4, \quad b = 21n + 6$, où $n \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $7a - 5b = -2$. En déduire une relation du type $ua + vb = 2$, où $u, v \in \mathbb{Z}$.
2. En déduire le PGCD de a et b en fonction de n.
3. Déterminer tous les entiers n pour lesquels a et b sont premiers entre eux.

Exercice 6

1. Calculer le PGCD de $516 \,\text{et}\, 231$ en utilisant l'algorithme d'Euclide (toutes les étapes sont requises).
2. En déduire une identité de Bézout : $\gcd(516, 231) = x \cdot 516 + y \cdot 231$.
3. Déterminer leur PPCM.
4. On considère l'équation diophantienne : $516x + 231y = 129$.
   - Montrer qu'elle admet au moins une solution.
   - Donner une solution particulière.
   - Décrire l'ensemble des solutions.

Exercice 7

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système de congruences :

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4, \\ x \equiv 5 \pmod 7. \end{cases}$$

2. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, il existe un entier m tel que

$$m \equiv -1 \pmod{2k} \quad \text{et} \quad m \equiv 1 \pmod{2k+1}.$$

3. En déduire que pour tout k, il existe un entier m tel que

$$\gcd(m+1, m-1) = 2k.$$

Exercice 8
Soit un polynôme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que :

- 1 est une racine double de P,
- -2 est une racine simple de P.

1. Déterminer les équations vérifiées par a, b, c, d.
2. Résoudre ce système pour exprimer b, c, d en fonction de a.
3. Déterminer, pour $a \neq 0$, la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9
On considère le polynôme suivant : $Q(X) = X^4 - 5X^2 + 4$.

1. Montrer que Q est un polynôme en X^2 et le factoriser dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer toutes les racines réelles et complexes de Q.
3. En déduire la factorisation complète de Q dans $\mathbb{C}[X]$.