Algèbre 1 Info (MAT1074L) L1 Maths-Info 2025-2026

Léon Matar Tine [1]

Automne 2025

1. Université Claude Bernard Lyon 1

1 Chapitre 1 : Calculs algébriques

- Rappel sur l'ensemble des nombres réels
  - Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
  - Intervalle de $\mathbb{R}$
  - Valeur absolue
  - Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum
- Les entiers naturels et les entiers relatifs
  - L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$
  - Opération d'addition et de multiplication sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$
- Rappel sur les fractions et les opérations sur les fractions
  - Opérations sur les fractions
- Règles sur les puissances
- Sommes et produits de familles finies de nombres réels
  - Définitions et propriétés élémentaires
- Techniques classiques de calculs algébriques
  - Sommes et produits télescopiques
  - Changement d'indice
  - Regroupement de termes
- Factorielle et coefficients binomiaux
  - Factorielle
  - Coefficients binomiaux

- Différents modes de démonstration
  - Raisonnement par hypothèse auxiliaire
  - Raisonnement par l'absurde
  - Raisonnement par contraposée
  - Raisonnement par contre exemple
  - Raisonnement par récurrence

4 Chapitre 4 : Applications

- Image directe et image réciproque
- Injection
- Surjection

Chapitre 1 : Calculs algébriques

Rappel sur l'ensemble des nombres réels

Comme abordé au Collège puis au Lycée, l'ensemble des nombres réels est représenté en mathématique par le symbole $\mathbb{R}$.
Il existe dans $\mathbb{R}$ un ordre naturel que l'on note "$\leq$" entre les nombres et qui vérifie les trois propriétés fondamentales suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$ (Réflexivité)
2. Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$. (Transitivité).
3. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$. (Antisymétrie).

Avec cette relation d'ordre, il existe ce que l'on appelle l'ordre strict sur $\mathbb{R}$, noté "$<$" où $x < y$ si "$x \leq y$ et $x \neq y$". Cette ordre strict n'est ni réflexif ni antisymétrique.

Intervalle de $\mathbb{R}$

La relation d'ordre "$\leq$" dans $\mathbb{R}$ permet de définir les intervalles.

Definition

Soient a et b deux réels, tels que $a < b$. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble de la forme suivante :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$

Les intervalles suivants $[a, b]$; $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$ sont dit fermés.
Les intervalles $]a, b[$; $]a, +\infty[$ et $]-\infty, b[$ sont dits ouverts.
Les intervalles $[a, b[$ et $]a, b]$ ne sont ni ouverts ni fermés.

Intervalle de $\mathbb{R}$

Proposition

Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $x \leq z$ *et* $y \leq t$ *alors* $x + y \leq z + t$.
2. *Si* $0 \leq x \leq y$ *et* $0 \leq z \leq t$ *alors* $0 \leq xz \leq yt$.
3. *On a* $x \leq y$ *si et seulement si* $-x \geq -y$.
4. *Si* $x \leq y$ *et* $z \leq 0$ *alors* $xz \geq yz$.

Valeur absolue

Definition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la valeur absolue de x, notée $|x|$, par :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } & x \geq 0 \\ -x \text{ si } & x < 0 \end{cases}$$

Exemple

$|-1| = 1$; $|0| = 0$; $|x+1| = x+1$ *si* $x \geq -1$ *et* $|x+1| = -x-1$ *si* $x < -1$.

Propriété

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $|x| \geq 0$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $|x| = |-x|$
- $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
- *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $a \geq 0$, $|x| \leq a$ *équivaut à* $-a \leq x \leq a$.

Valeur absolue

Théorème (Inégalités triangulaires)

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

b) $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$.

Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum

Definition (Majorant, Minorant)

Soit A une partie composée de nombres réels. On dit que A est :

- majorée s'il existe un réel M tel que $x \leq M$ pour tout $x \in A$. On dit que M est un majorant de A
- minorée s'il existe un réel m tel que $m \leq x$ pour tout $x \in A$. On dit que m est un minorant de A
- bornée si A est à la fois majorée et minorée

Exemple

L'intervalle $]16, 17]$ *est majoré par 17 et minoré par 10 par exemple.*

Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum

Remarque

- *Une partie majorée (resp. minorée) n'admet pas un unique majorant (resp. minorant). Elle en a une infinité.*
- *Les intervalles (sauf* $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$*) sont des parties de* $\mathbb{R}$ *majorées ou minorées.*

Definition (Minimum, Maximum)

Soient A une parties de $\mathbb{R}$ et m et M deu nombres réels

- si $m \in A$ et m est un minorant de A, on dit que m est le minimun de A, noté $min(A)$
- si $M \in A$ et M est un majorant de A, on dit que M est le maximun de A, noté $max(A)$.

Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum

Exemple

- *l'intervalle* $]-1,2]$ *admet* 2 *comme maximum*
- *l'intervalle* $]-1,2[$ *est borné mais n'admet ni maximum ni minimum.*

Exercices d'application :

1. Est-ce que $[-\pi,\pi]$ admet un maximum ? un minimum ?
2. Donner l'ensemble des majorants des parties $A =]0,2[$ et $B =]-1,2]$.
3. Mettre sous forme d'intervalle les ensembles $\{x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leq 2\}$ et $\{x \in \mathbb{R},\ |3x-4| \leq 1\}$.
4. Mettre l'intervalle $]-7,2[$ sous forme d'un ensemble utilisant une valeur absolue.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

La construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels a été formalisée pour la première fois au 19ème siècle par le mathématicien italien Giuseppe Peano et le mathématiciens allemand Richard Dedekind. Cette construction dépasse le cadre de ce cours de L1 où nous nous contenterons d'admettre l'existence de $\mathbb{N}$ et supposons qu'il vérifie les règles suivantes :

1. $\mathbb{N}$ est non vide.
2. $\mathbb{N}$ est totalement ordonné : pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, on a $i \leq j$ ou $j \leq i$.
3. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément : si A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, alors il existe a appartenant à A tel que pour tout i appartenant à A, $a \leq i$.
4. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Propriété

- *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *possède un plus petit élément, noté* 0*.*
- $\mathbb{N}\backslash\{0\}$*, l'ensemble des entiers naturels privé de* 0*, possède un plus petit élément, noté* 1*.*

On peut ainsi nommer les entiers successifs :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie $\{p \in \mathbb{N}, p > n\}$ possède un plus petit élément, appelé successeur de n et noté $n+1$.
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie $\{p \in \mathbb{N}, p < n\}$ possède un plus grand élément, appelé prédécesseur de n et noté $n-1$.

Ainsi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels.
À partir de l'ensemble $\mathbb{N}$, on peut définir l'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$, comme étant les entiers naturels et leurs opposés. Ainsi $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.
En d'autres termes, un nombre est appelé entier relatif si c'est un entier naturel ou si son opposé est un entier naturel.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Remarque

Un entier naturel est donc un entier relatif. On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Opération d'addition et de multiplication sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Pour tout a, b et c dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ on a :

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $(a * b) * c = a * (b * c)$

Il s'agit de l'associativité de l'addition et de la multiplication

- $a + 0 = 0 + a = a$
- $a * 1 = 1 * a = a$

0 est l'élément neutre de l'addition et 1 celui de la multiplication.

Opération d'addition et de multiplication sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

- $a + b = b + a$
- $a * b = b * a$

Il s'agit de la commutativité de l'addition et de la multiplication

- $(a + b) * c = a * c + b * c$
- $a * (b + c) = a * b + a * c$

Il s'agit de la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication et de la multiplication par rapport à l'addition.

- Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $a' \in \mathbb{Z}$ tel que $a + a' = a' + a = 0$. On note cet élément a' par $-a$ (symétrie ou opposé).

Rappel sur les fractions et les opérations sur les fractions

Definition

Une fraction est un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

On dit que deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont égaux si et seulement si $ab' = a'b$.

Propriété (Simplification)

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, b et m appartenant à $\mathbb{Z}^*$ alors $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$.

Opérations sur les fractions

- Pour deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ on définit la somme par la formule $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$
- Pour deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ on définit le produit par la formule $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Definition

L'ensemble des fractions, c'est-à-dire des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, constitue l'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$ en mathématique.

Règles sur les puissances

Definition

Soient a un nombre réel non nul et m un entier strictement positif. On définit $a^m = a \times a \times a \times \cdots \times a$ pris $m-$fois

Propriété

Pour deux entiers strictement positifs m et n on a :

- $a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m-fois} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n-fois} = a^{m+n}$.
- $(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{m-fois} \times \cdots \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{m-fois}}_{n-fois} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{mn-fois} = a^{mn}$
- $a^0 = 1$
- *Pour $m \in \mathbb{N}$, on peut définir a^{-m}, pour tout réel a non nul, par* $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$.

Règles sur les puissances

Ainsi, on peut généraliser les formules précédentes dans le cas où m et n sont dans $\mathbb{Z}$.
Pour deux nombres réels a et b non nuls et $m \in \mathbb{Z}$, on a aussi $(a \times b)^m = a^m \times b^m$.
Généralisation :

- Soient $a \neq 0$ un nombre réel, m un entier relatif et n un entier strictement positif. Si $a > 0$ on définit $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
- Pour a et b deux réels strictement positifs et pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$ on a : $a^x a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $(ab)^x = a^x b^x$.

Définitions et propriétés élémentaires

Definition (Symbole $\sum$ et $\prod$)

Soit I un ensemble fini non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels. On note :

- $\sum_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.
- $\prod_{i\in I} a_i$ le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Remarque

Par convention, si $I = \emptyset$: $\sum_{i\in I} a_i = 0$ *et* $\prod_{i\in I} a_i = 1$.

Cas fondamental : Si $I = [\![m, n]\!]$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$ et $m \leq n$:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n.$$

Remarque

L'indice "i" ne sert qu'à compter c'est la raison pour laquelle

$$\sum_{i=1}^{n} 3i + 2 = \sum_{k=1}^{n} 3k + 2 = \sum_{s=1}^{n} 3s + 2.$$

Définitions et propriétés élémentaires

Exemple

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$; $\sum_{k=1}^{n} 28 = \underbrace{28 + 28 + \cdots + 28}_{n-fois} = 28n$
2. $\sum_{k=0}^{n} 28 = \underbrace{28 + 28 + \cdots + 28}_{(n+1)-fois} = 28(n+1)$
3. *somme des n premiers naturels :*
   $$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
4. *somme des carrés des n premiers entiers :*
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
5. *somme géométrique : pour q réel et* $q \neq 1$ *on a*
   $$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Définitions et propriétés élémentaires

Plus généralement, si $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leq n$ on a

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{(1 - q^{n+1-m})}{1 - q}.$$

La preuve de ce résultat découle du raisonnement suivant : On note par $S_{m,n}$ cette somme. Ainsi on écrit d'une part

$$S_{m,n} = q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots + q^n$$
$$q \times S_{m,n} = q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots + q^n + q^{n+1}$$

En faisant la différence des deux lignes précédentes on trouve :

$$S_{m,n} - q \times S_{m,n} = q^m - q^{n+1} \Longrightarrow S_{m,n}(1 - q) = q^m - q^{n+1}$$

$$\Longrightarrow S_{m,n} = \frac{q^m - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Définitions et propriétés élémentaires

Propriété (Linéarité de la somme)

Soit I, un ensemble fini, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres. On a :

1. $\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$
2. *Pour tout réel λ,* $\sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i$.

Exemple

Soit $n \geq 5$ un entier et x, y deux réels. Nommer et calculer la somme :

- $\sum_{k=0}^{n}(3k-2x) = \sum_{k=0}^{n} 3k - \sum_{k=0}^{n} 2x = 3\sum_{k=0}^{n} k - (n+1)2x =$
  $3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)2x = \frac{(n+1)(3n-4x)}{2}$
- $\sum_{s=0}^{n^2} x(s+y) = x\sum_{s=0}^{n^2}(s+y) = x\sum_{s=0}^{n^2} s + x\sum_{s=0}^{n^2} y =$
  $x\sum_{s=0}^{n^2} s + (n^2+1)xy = x\frac{(n^2+1)n^2}{2} + (n^2+1)xy = \frac{x}{2}(n^2+1)(n^2+2y).$
- $\sum_{i=4}^{n-1}(2^i+3) = \sum_{i=4}^{n-1} 2^i + \sum_{i=4}^{n-1} 3 = \sum_{i=4}^{n-1} 2^i + 3(n-4) =$
  $2^4\frac{1-2^{n-4}}{1-2} + 3(n-4) = \frac{2^4-2^n}{-1} + 3(n-4) = 2^n + 3n - 28$

Définitions et propriétés élémentaires

Propriété (Pour le produit)

1. *Pour tout λ réel, $\prod_{i\in I} \lambda = \lambda^n$ où n est le nombre d'élements de I.*
2. $\prod_{i\in I} a_i b_i = (\prod_{i\in I} a_i)(\prod_{i\in I} b_i)$
3. $\prod_{i\in I} \lambda a_i = \lambda^n (\prod_{i\in I} a_i)$ *avec n le nombre d'éléments de I.*

Propriété (Exponentielle d'une somme)

La propriété $e^{a+b} = e^a e^b$ se généralise à une famille de réels $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$: $exp(\sum_{i=1}^n a_i) = \prod_{i=1}^n exp(a_i)$.

Propriété (Logarithme d'un produit)

Pour $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln(\prod_{i=1}^n b_i) = \sum_{i=1}^n \ln(b_i)$.

Sommes et produits télescopiques

Partons de la somme suivante $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3$. Si on déroule cette somme on a pour différentes valeurs de k :

$k = 1$ on a $2^3 - 1^3$

$k = 2$ on a $3^3 - 2^3$

$k = 3$ on a $4^3 - 3^3$

$\ldots \quad \ldots$

$k = n - 1$ on a $n^3 - (n-1)^3$

$k = n$ on a $(n+1)^3 - n^3$.

En faisant la somme on remarque que beaucoup de termes se télescopent et on obtient $(n+1)^3 - 1^3$. Ainsi $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3$ est une somme télescopique qui vaut après simplification $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3 = (n+1)^3 - 1$.

Sommes et produits télescopiques

Definition

Si $(u_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ est une famille de nombres, la somme $\sum_{k=m}^{n}(u_{k+1}-u_k)$ est dite somme télescopique. Cette somme vaut $\sum_{k=m}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_m$.

Sommes et produits télescopiques

Exemple

$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{2(k+1)}}{(k+1)^2} - \frac{e^{2k}}{k^2} = ?$. *En posant* $u_k = \frac{e^{2k}}{k^2}$ *alors on reconnait la somme de termes télescopiques d'où*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{2(k+1)}}{(k+1)^2} - \frac{e^{2k}}{k^2} = u_{n+1} - u_1 = \frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)^2} - e^2.$$

De même, partons du produit $\prod_{k=1}^{n} \frac{e^{(k+1)^2}}{e^{k^2}} = ?$. *Pour ce produit, en posant* $u_k = e^{k^2}$, *le produit précédent s'écrit*

$\prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \cdots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *et ainsi par simplification on a*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_1} = \frac{e^{(n+1)^2}}{e}.$$

C'est ça qu'on appelle un produit télescopique.

Sommes et produits télescopiques

Definition (Produit télescopique)

On dit qu'un produit $\prod_{k=0}^{n} a_k$ est télescopique si pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on peut écrire de façon simple a_k sous la forme $a_k = \dfrac{b_{k+1}}{b_k}$.

Soit $\prod_{k=0}^{n} \dfrac{b_{k+1}}{b_k}$ un produit télescopique. Alors $\prod_{k=0}^{n} \dfrac{b_{k+1}}{b_k} = \dfrac{b_{n+1}}{b_0}$.

Sommes et produits télescopiques

Exercice

Soit $n \geq 1$ un entier et soit $y \in \mathbb{R}$. Calculer

- $U_n := \sum_{j=3}^{n} \ln(j+1) - \ln(2j)$

  Indication : On commence par remarquer que $\ln(2j) = \ln(2) + \ln(j)$ puis on remarque une somme télescopique.

- $V_n(y) := \prod_{k=1}^{n} \frac{2y(k+1)^3}{k^3}$

  Indication : ici $2y$ ne dépend pas de k donc en le sortant du produit, le reste devient un produit télescopique.

Application des sommes télescopiques

factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Preuve de la formule :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}(a-b)a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{a^{k+1} b^{n-1-k}}_{a^{k+1}b^{n-(k+1)}} - a^k b^{n-k}$$

ainsi on remarque une somme télescopique. Ce qui donne

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = a^n b^0 - a^0 b^n = a^n - b^n.$$

Remarque

- *Pour* $n = 2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- *Pour* $b = 1$ *et* $a \neq 1$, $a^n - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k$

Changement d'indice

Soit la somme $\sum_{k=m}^{n} a_k$, où $a_m, \cdots, a_n$ sont des nombres. L'intervalle des indices de la somme est
$[\![m, n]\!] = \{k, k \in [\![m, n]\!]\} := \{i + 3, i \in [\![m - 3, n - 3]\!]\}$.
Ainsi on a l'égalité : $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m-3}^{n-3} a_{i+3}$.

Exemple

On veut faire les changements d'indices $i = k + 2$ et $j = k - n$ à la somme $S = \sum_{k=n}^{2n} \frac{e^{2k+1}}{k\sqrt{k+3}}$

- *Pour $i = k + 2$ alors $k = i - 2$ donc* $S = \sum_{i=n+2}^{2n+2} \frac{e^{2i-3}}{(i-2)\sqrt{i+1}}$
- *Pour $j = k - n$ alors $k = j + n$ donc* $S = \sum_{j=0}^{n} \frac{e^{2(j+n)+1}}{(j+n)\sqrt{j+n+3}}$

Regroupement de termes

Partons de l'exemple de la somme suivante : $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n), \quad n \geq 1.$

Ici on peut décomposer la somme en deux termes en écrivant

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \min(k, n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k, n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n(n) \\ &= \frac{n(3n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Regroupement de termes

Regardons également l'exemple suivant : soit $n \geq 1$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$? ici on remarque que :

$k = 0 \quad (-1)^0 = 1 \quad ; k = 1 \quad (-1)^1 = -1 \quad ; k = 2 \quad (-1)^2 = 1$

donc le terme $(-1)^k$ fait alterner le signe de S_n. Ainsi,

$S_n = -1 + 2^2 - 3^2 + 4^2 \cdots - (2n-1)^2 + (2n)^2$. En écrivant la somme

$S_n = \underbrace{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2}_{\text{termes pairs}} - \underbrace{(1 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2)}_{\text{termes impairs}}$. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2 = \underbrace{\sum_{p=0}^{n}(-1)^{2p}(2p)^2}_{k=2p} + \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{2p+1}(2p+1)^2}_{k=2p+1}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} 4p^2 + 4p + 1 = \sum_{p=0}^{n} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} 4p - \sum_{p=0}^{n-1} 1$$

$$= 4n^2 - 4\frac{n(n-1)}{2} - n = 4n^2 - 2n^2 + 2n - n = 2n^2 + n$$

Factorielle

Definition

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle factorielle n l'entier noté $n!$ défini par

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times (n-1) \times n$$

Remarque

- $(n+1)! = n! \times (n+1)$
- $0!$ *est un produit vide, donc* $0! = 1$
- $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$

Factorielle

Exemple

- *Si on veut calculer le produit des n premiers entiers pairs :* $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2(n-1) \times 2n$ *?*
  Attention, ce produit ne vaut pas $(2n)!$*.*
  Écrivons le produit :

$$\begin{aligned} & 2 \times 4 \times \cdots \times 2(n-1) \times 2n \\ = \; & 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times (n-1) \times 2 \times n \\ = \; & 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \cdots \times (n-1) \times n) \\ = \; & 2^n \times n! \end{aligned}$$

Factorielle

Exemple

- *Pour le produit des entiers impairs entre* 1 *et* $(2n+1)$ *:*
  $1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)$.
  Attention, de même ici ce produit de vaut pas $(2n+1)!$.
  Écrivons le produit comme suit

$$\begin{aligned} & 1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1) \times (2n+1) \\ = & \frac{1 \times 2 \times 3 \cdots \times (2n-1) \times 2n \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2(n-1) \times 2n} \\ = & \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!} \end{aligned}$$

Coefficients binomiaux

Definition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$

c'est-à-dire "p parmi n" par $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Remarque

- *pour* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $p \notin [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} = 0$.
- $\binom{n}{0} = 1\,;\ \binom{n}{1} = n\,;\ \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Coefficients binomiaux

Exemple

- $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{5 \times 6}{1 \times 2} = 15\,;\quad \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3}$
- $\binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4}.$

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$

Preuve

En effet si $p \in [\![0, n]\!]$ on a

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

Coefficients binomiaux

Remarque

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1\,;\ \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n\,;\ \binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tout ceci par symétrie.

Théorème

(Formule de Pascal) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

La preuve est donnée ci-dessous.

Coefficients binomiaux

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$ *avec* $p \in [\![0, n]\!]$

- *Si* $p = n$ *on a* $\binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n} = 1 + 0 \quad et \quad \binom{n}{n} = 1$
- *Si* $p \in [\![0, n-1]\!]$, *on écrit*

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= (n-1)!\left(\frac{1}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{1}{p!(n-p-1)!}\right).\end{aligned}$$

Or d'une part $\frac{1}{(p-1)!} = \frac{p}{p(p-1)!} = \frac{p}{p!}$ *ainsi* $\frac{1}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{p}{p!(n-p)!}$.
D'autre part, $\frac{1}{(n-p-1)!} = \frac{n-p}{(n-p)!}$ *ainsi* $\frac{1}{p!(n-p-1)!} = \frac{n-p}{p!(n-p)!}$ *d'où*

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!}(p + (n-p)) = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

Coefficients binomiaux

Le corollaire (conséquence) de ce théorème est le triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0
6	1	6	15	20	15	6	1

Ainsi l'élément à la ligne n et à la colonne p s'obtient en sommant celle à la ligne $n-1$ et colonne $p-1$ et celle de la ligne $n-1$ et colone p.
Dans ce tableau, la première colonne vaut 1 car $\binom{n}{0} = 1$. La diagonale du tableau vaut 1 car $\binom{n}{n} = 1$. La surdiagonale vaut 0 car $p > n$.

Remarque

La formule de Pascal permet de voir que $\binom{n}{p}$ est un entier.

Le binôme de Newton

Le binôme de Newton est une méthode pour calculer la puissance entière d'une somme. Les formules de développement connues par coeur sont
$(a+b)^0 = 1; (a+b)^1 = a+b; (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
Le binôme de Newton permet de généraliser ce développement au cas $(a+b)^n$.

Théorème

Pour tout a, b réels et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p := \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

Le binôme de Newton

Exemple

$(1+x)^5$ *pour tout réel* x

$$\begin{aligned}(1+x)^5 &= \sum_{p=0}^{5}\binom{5}{p}1^p x^{5-p} = \sum_{p=0}^{5}\binom{5}{p}x^p 1^{5-p}\\ &= \binom{5}{0}x^0+\binom{5}{1}x^1+\binom{5}{2}x^2+\cdots+\binom{5}{5}x^5\\ &= x^0+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5 \text{ par le triange de Pascal.}\end{aligned}$$

Exemple

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $x\in\mathbb{R}$, *on veut calculer* $A_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$. *Ici c'est le binôme de Newton avec* $a=b=1$. *En effet*

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Longrightarrow 2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Le binôme de Newton

Exemple

Soit à calculer $S_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p$ *?*

On a $$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p 1^{n-p} = (2+1)^n = 3^n$$

Exemple

Soit $S_n = \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i} (-1)^i$*? Elle ressemble à un binôme de Newton.*

En effet $(1+(-1))^{2n} = \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i} 1^{2n-i}(-1)^i = \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i} (-1)^i$ *ainsi*

$0^{2n} = \binom{2n}{0}(-1)^0 + \binom{2n}{1}(-1)^1 + \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i}(-1)^i$. *En d'autres termes*

$0 = 1 + 2n(-1) + \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i}(-1)^i$. *D'où* $-1 + 2n = \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i}(-1)^i$.

a) **Somme double indexée par un rectangle**

Soit $(a_{i,j})_{i\in[\![m,n]\!],j\in[\![p,q]\!]}$ une famille de nombres indexée par les entiers i et j. La somme de tous ces nombres est notée $\sum_{m\leq i\leq n, p\leq j\leq q} a_{ij}$. Pour cette somme, en notant par $L_i := \sum_{j=p}^{q} a_{ij}$ avec $i \in [\![m,n]\!]$ et par $C_j = \sum_{i=m}^{n} a_{ij}$ avec $j \in [\![p,q]\!]$. Alors $\sum_{m\leq i\leq n, p\leq j\leq q} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} L_i = \sum_{j=p}^{q} C_j$.

En particulier, on a l'égalité des deux écritures

$$\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{ij} := \sum_{m\leq i\leq n, p\leq j\leq q} a_{ij}.$$

Sommes doubles

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$, *calculons* $S_n = \sum_{0 \leq i,j \leq n} 2^i$:

- *D'une part*

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^i &= \sum_{i=0}^{n}(n+1)2^i = (n+1)\sum_{i=0}^{n} 2^i \\ &= (n+1)\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = (n+1)(2^{n+1}-1) \end{aligned}$$

- *D'autre part*

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{j=0}^{n}\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \sum_{j=0}^{n} 2^{n+1} - 1 = (n+1)(2^{n+1}-1)$$

b) **Somme double indexée par un triangle**

Soit $(a_{i,j})_{m\leq i\leq j\leq n}$ une famille de nombres indexée par les entiers i et j appartenant à $[\![m,n]\!]$, mais seulement pour les couples (i,j) tel que $i\leq j$.

Pour calculer la somme $\displaystyle\sum_{m\leq i\leq j\leq n} a_{ij}$ on peut poser $L_i=\displaystyle\sum_{j\geq i}^{n} a_{ij}$ et

$C_j=\displaystyle\sum_{i\leq j}^{n} a_{ij}$. Ainsi on pourra avoir deux façons d'expliciter la somme

$\displaystyle\sum_{m\leq i\leq j\leq n} a_{ij}$ soit en sommant ligne par ligne c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$ ou bien

en sommant colonne par colonne c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{ij}$.

En résumé, la somme double indexée par un triangle s'écrit :

$$\sum_{m\leq i\leq j\leq n} a_{ij}=\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}=\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{ij}.$$

Sommes doubles

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculons la quantité $D_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$. Ici on remarque que les indices ont une contrainte triangulaire $1 \leq i \leq j \leq n$.

$$D_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2}$$

$$\text{D'où } D_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n}{2}\right) = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Produit de deux sommes finies

Soient $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ deux familles de nombres réels. Comment développer le produit suivant

$$P = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)?$$

Attention : Il faut pas commettre l'erreur en disant que $P = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. C'est Faux.

Pour calculer formellement un tel produit il faut commencer par changer le nom d'un des indices. Puis développer le produit en utilisant la "distributivité" $P = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(a_j \sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j b_k.$

Les ensembles

Les ensembles

Definition

Un ensemble est une collection bien définie d'objets qu'on appelle éléments.

Exemple

soit Ω, *l'ensemble de tous les résultats en faisant la somme de 2 dés. Alors* $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ *et les nombres* $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ *sont les éléments de* Ω.

Les ensembles qu'on a fréquemment l'habitude d'employer sont
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \cdots\}$ des entiers naturels.
$\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \cdots\}$ des entiers relatifs.
$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels c'est-à-dire s'écrivant sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.
$\mathbb{R}$ l'ensemble formé par tous les nombres réels.

Les ensembles

Il existe un ensemble ne contenant aucun élément, qu'on appelle l'ensemble vide et qui est noté par $\emptyset$.

Definition

(Il s'agit d'un rappel)
Le symbole $\in$ indique qu'un élément appartient à un ensemble. À l'inverse le symbole $\notin$ indique qu'un élément n'appartient pas à un ensemble.

Exemple : $a \in \{a, e, i, o, u\}$; $k \notin \{a, e, i, o, u\}$; $2 \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

Les sous-ensembles (notion d'inclusion)

Definition

Soit Ω un ensemble. On dit que A est un sous-ensemble de Ω si et seulement si tous les éléments de A sont aussi des éléments de Ω. Ainsi l'ensemble A est inclus dans l'ensemble Ω. La notation $A \subseteq \Omega$ est utilisée pour symboliser l'inclusion de A dans Ω.

Remarque

Le symbole $\not\subset$ indique qu'un ensemble n'est pas inclus dans un autre. Ainsi $A \not\subset B$ exprime donc qu'au moins un élément de A n'est pas un élément de B.

Les sous-ensembles (notion d'inclusion)

Exemple

En revenant sur l'ensemble Ω *comme étant la somme de deux dés c'est-à-dire* $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. *On peut citer les quelques sous-ensembles suivants :*

$\Omega_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ *: ensemble des résultats pairs*

$\Omega_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ *: ensemble des résultats inférieurs ou égaux à 6.*

$\Omega_3 = \emptyset$ *: ensemble des résultats supérieurs à 12*

$\Omega_4 = \{11\}$ *: ensemble des résultats divisible par 11.*

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

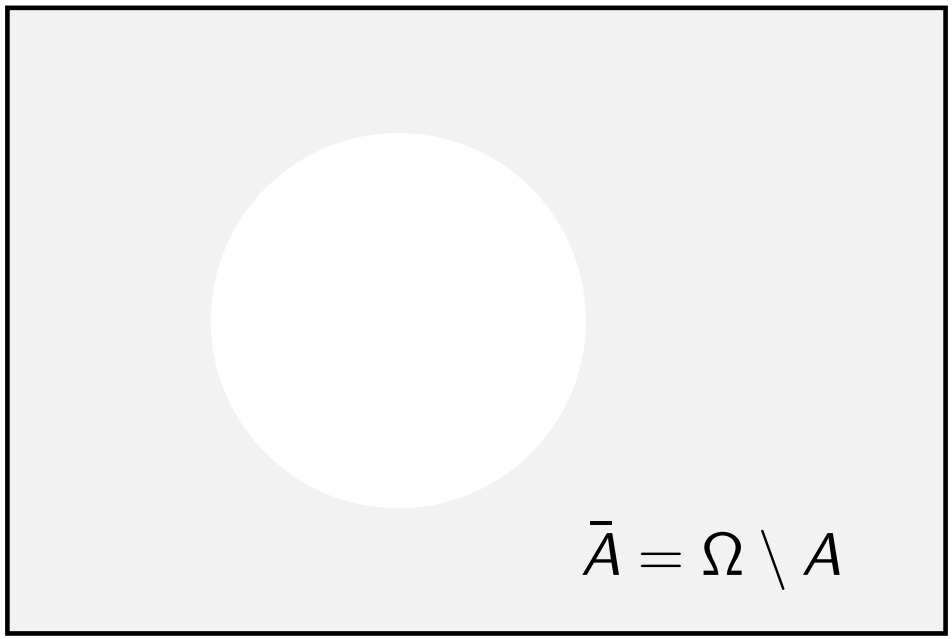
$\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$; $\{0, 1, 2, 3, 5, 6\} \not\subset \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

Opérations sur les ensembles

Nous présentons ici les opérations ensembliste les plus importantes.

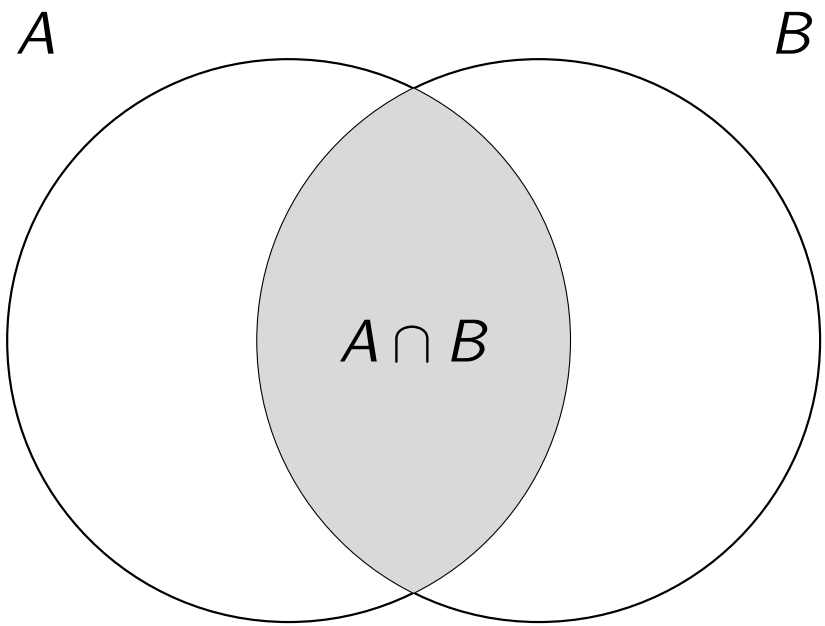
a) **Complément d'un ensemble**

Soit Ω un ensemble. On définit le complément d'une partie A de Ω, noté $\bar{A}$, l'ensemble de tous les éléments qui ne sont pas dans A.



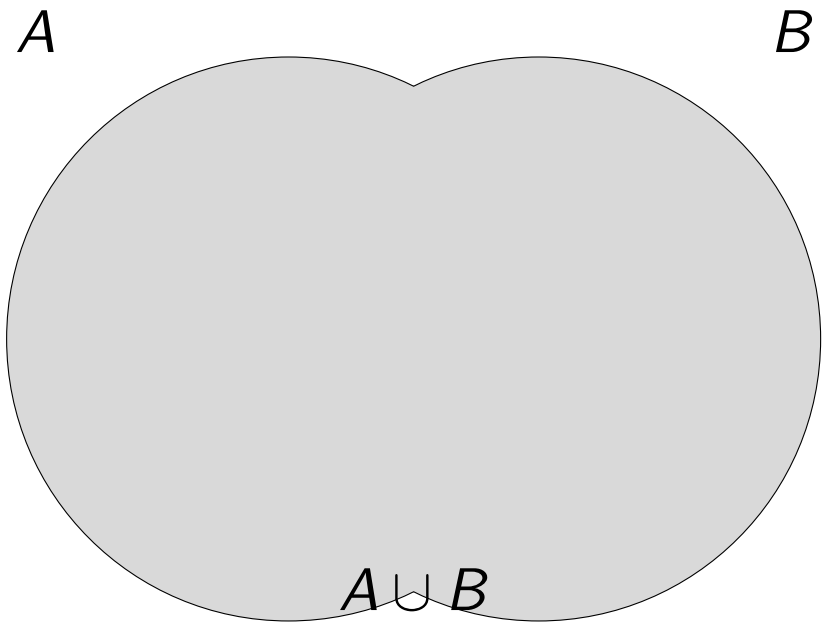
b) **Intersection d'ensembles**

Soient A et B deux ensembles. On appelle intersection de A et B, notée $A \cap B$, l'ensemble de tous les éléments appartenant à la fois à A et à B.



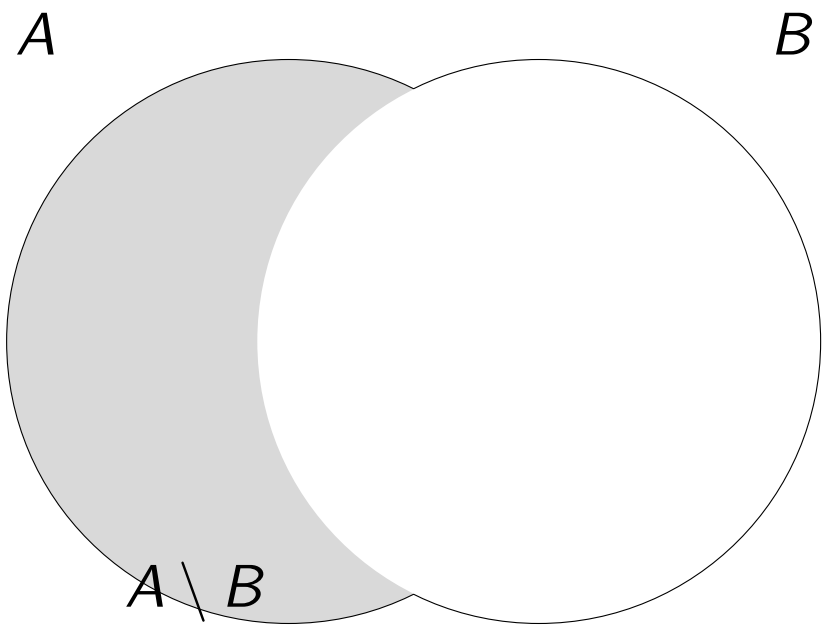
c) **Union de deux ensembles**

Soient A et B deux ensembles. On appelle union des deux ensembles A et B, l'ensemble noté $A \cup B$, représentant tous les éléments appartenant soit à A ou à B.



d) **Différence de deux ensembles**

Soient A et B deux ensembles. On appelle différence de A et B, notée $A \setminus B$, l'ensemble de tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B.



Opérations sur les ensembles

Remarque

(Différence symétrique) Soient A et B deux ensembles, on appelle différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$ (lire A delta B), l'ensemble constitué par la réunion des éléments de A qui ne sont pas dans B, et des éléments de B qui ne sont pas dans A.

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}).$$

Exercice (à faire)
Reprenons l'ensemble Ω concernant les dés. Soient les sous-ensembles de Ω : Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 précédemment définis.

- Ecrire les éléments des sous-ensembles obtenus par les opérations suivantes : complémentaire ; intersection ; union ; différence.

Produit cartésien de 2 ensembles

Definition

On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F, l'ensemble noté $E \times F$ des couples (a, b) où a est un élément de E et b un élément de F.
Par exemple, si $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$, alors
$E \times F = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}$.
Ce produit n'est pas commutatif, c'est-à-dire $E \times F$ peut être différent de $F \times E$.

Exemple

Le plan, $\mathbb{R}^2$, est le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Remarque

Lorsque E et F sont deux ensembles finis, alors le nombre d'éléments de $E \times F$ est le produit du nombre d'éléments de E et du nombre d'éléments de F.

Produit cartésien d'ensembles

Definition

Soit E un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments. On appelle cardinal de E, le nombre d'éléments de E et on le note *card* E

Propriété

Soient $E_1, E_2, E_3, \cdots, E_p$, p *ensembles finis, alors*

$$card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) \times \cdots \times card(E_p).$$

Ensemble des parties d'un ensemble (recouvrement, partition)

Definition

Si A est un ensemble, l'ensemble des parties de A est l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de A. Il est noté $\mathcal{P}(A)$.

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$, *les parties de A sont*
$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.
On a donc $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Propriété

- *Si A contient n éléments,* $\mathcal{P}(A)$ *contient exactement* 2^n *éléments.*
- *Si A est infini,* $\mathcal{P}(A)$ *l'est aussi.*

Recouvrement, partition

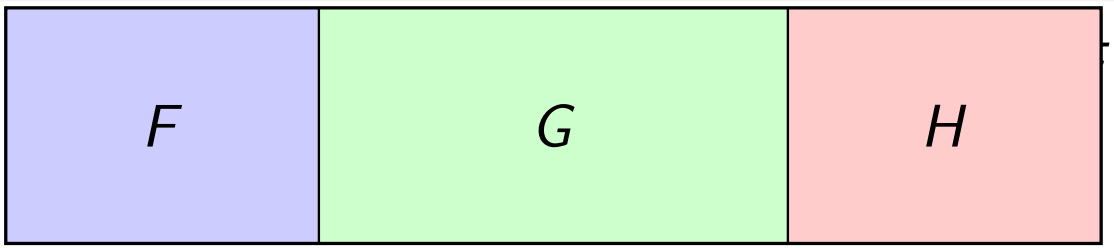
a) **Recouvrement** : Soit X un ensemble, A une partie de X. Un recouvrement de A est une famille de parties de X dont la réunion contient A. En d'autres termes, il existe une famille $(U_i)_{i\in I}$ de parties de X telles que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Ce recouvrement est dit fini si I est fini.

En particulier, un recouvrement de X vérifie $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.

b) **Partition** : Un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ est appelé partition si les U_i sont disjoints deux à deux c'est-à-dire $i \neq j$, $U_i \bigcap U_j = \emptyset$.

Exemple

Si E est le rectangle ci-dessous, alors les petits rectangles coloriés F, G, H constitituent une partition de E.



Manipulation des ensembles à l'aide des quantificateurs

Pour exprimer avec précision les propriétés des ensembles et des éléments qui les composent, on utilise souvent les quantificateurs. Il en existe deux :

- La locution "pour tout" ou "quelque soit", appelée quantificateur universel et notée $\forall$.
- La locution "il existe", appelée quantificateur existentiel et notée $\exists$.

Exemple

$\forall x \in E$, $P(x)$ se lit " pour tout x appartenant à l'ensemnle E, la proriété P est vraie". Ici le symbole "$\forall$" signifie donc que la propriété P est vérifiée pour tout x de l'ensemble E.

Exemple

$\exists x \in E$, $P(x)$ se lit " il existe x appartenant à l'ensemnle E, tel que la proriété P est vraie". Ici le symbole " $\exists$ " signifie donc qu'il existe (au moins) un x de l'ensemble E vérifiant la propriété P.

Manipulation des ensembles à l'aide des quantificateurs

Remarque

a) *Attention, la locution "il existe" ne signifie pas "il existe un et un seul", mais bien "il existe au moins un". Autrement dit, cette locution assure qu'il existe au moins un élément, et donc éventuellement plusieurs, vérifiant une propriété donnée, mais n'assure pas que cet élément soit unique. Pour l'expression "il existe un et un seul " ou "il existe un unique " se note* $\exists!$.

Manipulation des ensembles à l'aide des quantificateurs

Remarque

b) *Attention l'ordre d'utilisation des quantificateurs a une importance. En effet dire :* $\forall\, n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z},\ k \geq n$ *se lit "pour tout entier n, il existe un entier k tel que k est plus grand que n" ou encore " tout entier relatif n admet un plus grand entier relatif k". Cette proposition est vraie puisque* $n+1$ *est toujours plus grand que n, quel que soit l'entier n.*
En revanche, dire : $\exists\, n \in \mathbb{Z}, \forall\, k \in \mathbb{Z},\ k \geq n$ *se lit "il existe un entier n tel que pour tout entier k, k est plus grand que n" ou encore "il existe un entier n qui est plus petit que tout entier k". Bien évidemment cette proposition est fausse (en effet il suffit de choisir* $k = n - 1$*).*

Les bases de logique

Origines de la logique

L'objectif ici est de bien définir le vocabulaire, les notations et le propriétés que nous utiliserons non seulement dans ce chapitre, mais également dans toutes les preuves de résultats que nous développerons que ce soit en cours ou en travaux dirigés. A partir de ce chapitre, il faudra donc construire les démonstrations de la façon la plus rigoureuse possible, en utilisant les bons quantificateurs, dans le bon ordre, mais également des stratégies de preuves (absurde, contraposée, récurrence par exemple).

Definition (Assertion)

Une **assertion** est un énoncé mathématique auquel on peut attribuer une valeur de vérité

vrai (V) ou Faux (F),

mais jamais les deux à la fois. C'est le principe du **tiers-exclu**.

Assertions et prédicats

Exemple

1. *L'énoncé "Paris est la capitale de la France", est* ***vrai (V)***.
2. *L'énoncé "24 est un multiple de 2", est* ***vrai (V)***.
3. *L'énoncé "19 est un multiple de 2", est* ***faux (F)***.

Definition (Prédicat)

Un **prédicat** est un énoncé mathématique contenant des lettres appelées "variables" tel que, quand on remplace chacune des lettres par un élément donné d'un ensemble, on obtient une assertion.

Assertions et prédicats

Exemple

1. *L'énoncé : $P(n)$ =“n n'est pas un multiple de 2”, est un **prédicat**, car il devient une **assertion** quand on donne une valeur à n. Par exemple,*
   $P(10)$=“10 est un multiple de 2” est une assertion vraie.
   $P(11)$=“11 est un multiple de 2” est une assertion fausse.
2. *L'énoncé $P(x, A)$=“$x \in A$”, est un **prédicat** à deux variables. Il devient une **assertion** quand on donne une valeur aux deux variables. Par exemple,*
   $P(1, \mathbb{N})$ est une assertion vraie,
   $P(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ est une assertion fausse.

Remarque

Une assertion peut s'interpréter comme un prédicat sans variable, c'est-à-dire comme un prédicat toujours vrai ou toujours faux.

Les connecteurs logiques

Definition (Négation d'un prédicat)

Soit P un prédicat, la négation de P est le prédicat non(P), qui est faux lorsque P est vrai ; vrai lorsque P est faux.

On résume en général ceci dans une table de vérité, comme suit

P	non P
V	F
F	V

Table de vérité pour non (P)

Exemple

1. *P="24 est un multiple de 2" est une assertion vraie (V), non (P)="24 n'est pas un multiple de 2" est une assertion fausse (F).*
2. *A partir du prédicat "$x \in A$", nous pouvons définir le prédicat non($x \in A$) qui est "$x \notin A$".*

Les connecteurs logiques

Definition (Conjonction)

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat "P et Q" est appelé **conjonction** de P et Q. C'est un prédicat qui est :

- vrai lorsque P et Q sont vrais simultanément,
- faux dans tous les autres cas.

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Table de vérité pour la conjonction

Notation (à retenir)

Nous écrivons parfois $P \wedge Q$ pour "P et Q".

Les connecteurs logiques

Exemple

1. *Soient P le prédicat "$x \in [0,4]$" et Q le prédicat "$x \in [2,8]$", le prédicat $P \wedge Q$ est "$x \in [2,4]$".*
2. *Soient P le prédicat "$x \in A$" et Q le prédicat "$x \in B$", le prédicat $P \wedge Q$ est "$x \in A \cap B$".*

Definition (Disjonction)

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat "P ou Q" est appelé **disjonction** de P et Q. C'est un prédicat qui est :

- vrai lorsque l'un au moins des deux prédicats est vrai,
- faux lorsque les deux prédicats sont faux simultanément.

Les connecteurs logiques

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table de vérité pour la disjonction

Notation (à retenir)

Nous écrivons parfois $P \vee Q$ pour "P ou Q".

Exemple

1. *Soient P le prédicat "$x \in [0,4]$" et Q le prédicat "$x \in [2,8]$", le prédicat $P \vee Q$ est "$x \in [0,8]$".*
2. *Soient P le prédicat "$x \in A$" et Q le prédicat "$x \in B$", le prédicat $P \vee Q$ est "$x \in A \bigcup B$".*

Definition (Implication)

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat "$P \Rightarrow Q$" est appelé **implication** de P et Q. C'est un prédicat qui est :
-faux lorsque P est vrai et Q est faux,
-vrai dans tous les autres cas.

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité :

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Table de vérité pour l'implication

Les connecteurs logiques

Remarques

1. *Nous disons que P est une condition suffisante pour Q.*
2. *$Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$.*
3. *si P est faux et Q est vrai, le prédicat $P \Rightarrow Q$ peut paraître curieux.*

Definition (Équivalence)

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat "$P \Leftrightarrow Q$" est appelé **équivalence** de P et Q. C'est un prédicat qui est :

- vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou faux,
- faux dans tous les autres cas.

Les connecteurs logiques

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité :

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Table de vérité pour l'équivalence.

Remarques

1. $(P \Rightarrow Q)$ *et* $(Q \Rightarrow P)$ *se note* $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$,
2. $(P \Leftrightarrow Q)$ *et* $(Q \Leftrightarrow R)$ *se note* $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$.

Propriétés

Definition (Logiquement équivalents)

Soient P_1 et P_2 deux prédicats.Si
- P_1 est vrai lorsque P_2 est vrai,
- P_2 est faux lorsque P_2 est faux,

on dit que P_1 et P_2 ont la même table de vérité, ou qu'elles sont logiquement équivalentes, et on note

$$P_1 \equiv P_2.$$

Dans le cas contraire, on note

$$P_1 \not\equiv P_2$$

Exemple

1. *Soit P un prédicat, $non(non(P)) \equiv P$.*
2. *Soient P et Q deux prédicats, $(P$ et $(P$ ou $Q)) \equiv P$.*

Propriétés

Considérons maintenant un prédicat P, qui peut prendre la valeur de vérité vrai ou faux. Considérons ensuite le prédicat composé

$$R = \text{“}P \text{ ou non} P\text{”}.$$

Ce prédicat est toujours vrai indépendamment du choix de P. En effet, avec la table de vérité, nous avons,

P	non (P)	P ou non(P)
V	F	V
F	V	V

Table de vérité pour une tautologie

Ce prédicat R est appelé **tautologie**.

Definition (Tautologie)

Un prédicat composé R qui est vrai quelles que soient les valeurs de vérité qui le composent, est appelé une **tautologie**.

Propriétés

D'un autre côté, sinon nous considérons le prédicat composé

$$Q = \text{“}P \text{ et non}(P)\text{”}.$$

Ce prédicat est toujours faux. En effet, avec la table de vérité, nous avons,

P	non (P)	P et non(P)
V	F	F
F	V	F

Table de vérité pour une incompatibilité

Nous disons que les prédicats P et non$P$ sont incompatibles.

Definition (Incompatibilité)

On dit que deux prédicats P et non$P$ sont incompatibles si leur conjonction est fausse quelles que soient les valeurs de vérité des prédicats qui les composent.

Propriétés

Proposition (Lois de De Morgan)

Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes

$$\begin{aligned} \text{non}\,(P \ \text{ou} \ Q) &\equiv (\text{non}\,P \ \text{et} \ \text{non}\,Q) \\ \text{non}\,(P \ \text{et} \ Q) &\equiv (\text{non}\,P \ \text{ou} \ \text{non}\,Q) \end{aligned}$$

Ce sont les ***lois de De Morgan*** *pour les prédicats.*

Proposition (Équivalences logiques avec trois prédicats)

Soient P, Q et R trois prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes

$$\begin{aligned} (P \ \text{ou} \ (Q \ \text{et} \ R) &\equiv (P \ \text{ou} \ Q) \ \text{et} \ (P \ \text{ou} \ R) \\ (P \ \text{et} \ (Q \ \text{ou} \ R) &\equiv (P \ \text{et} \ Q) \ \text{ou} \ (P \ \text{et} \ R) \end{aligned}$$

Proposition (Équivalences logiques avec trois prédicats)

Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes

$$P \Rightarrow Q \equiv (\text{non } P \quad \text{ou} \quad Q),$$

nous disons que Q est une ***condition nécessaire*** *pour P.*

$$\begin{array}{lcl} \text{non}(P \Rightarrow Q) & \equiv & (P \ \text{ et } \ \text{non } Q) \\ (P \Leftrightarrow Q) & \equiv & \text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q) \\ (P \Leftrightarrow Q) & \equiv & ((P \Rightarrow Q) \ \text{ et } \ (Q \Rightarrow P)) \end{array}$$

Notons que $\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}Q)$ est la ***contraposée*** *de $P \Rightarrow Q$.*

Quantificateurs mathématiques

A partir d'un prédicat $P(x)$ défini sur un ensemble E, nous construisons de nouvelles assertions, que l'on appelle assertions quantifiées, en utilisant les quantificateurs "quel que soit" et "il existe".

Definition (Quantificateur $\forall$)

Le quantificateur "quel que soit" noté $\forall$ permet de définir l'assertion quantifiée "$\forall x \in E,\ \ P(x)$,"
qui est vraie pour tous les éléments x appartenant à E, le prédicat $P(x)$ est vraie.

Exemple

1. " $\forall x \in [-3,1],\ \ x^2+2x-3 \leq 0$ " *est vraie,*
2. " $\forall n \in \mathbb{N},\ \ (n-3)n \geq 0$ " *est fausse,*
3. " $\forall n \in \mathbb{N},\ \ (n^2$ *pair* $\Rightarrow n$ *pair)* " *est vraie.*

Quantificateurs mathématiques

Definition (Quantificateur $\exists$)

Le quantificateur "il existe" noté $\exists$ permet de définir l'assertion quantifiée "$\exists\, x \in E,\ \ P(x)$,"
qui est vraie si l'on peut trouver au moins un élément x appartenant à E, tel que le prédicat $P(x)$ soit vraie.

Remarque

S'il existe un et un seul élément, on peut écrire $\exists!\, x \in E,\ \ P(x)$.
Nous dirons alors qu'il existe un unique élément x *de* E *vérifiant* $P(x)$.

Exemple

1. *L'assertion quantifiée "*$\exists\, x \in \mathbb{R},\ \ x^2 = 4$*" est vraie.*
2. *L'assertion quantifiée "*$\exists!\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \ln(x) = 1$*" est vraie.*

Quantificateurs mathématiques

Remarque

Notons que si "$\forall\, x \in E,\ P(x)$" est vraie, alors "$\exists\, x \in E,\ P(x)$" est vraie.

Attention :

il faudra manipuler avec précaution les assertions de la forme "$\exists\,!\, x \in E,\ P(x)$" pour lesquelles la notation $\exists\,!$ n'est pas un quantificateur bien qu'il en ait l'air !

En effet, si nous posons

$$R_1 = \text{"}\exists\, x \in E,\ P(x)\text{"} \text{ (c'est l'existence)}$$

et

$$R_2 = \text{"}\forall\, x \in E,\ \forall\, x' \in E,\ ((P(x) \text{ et } P(x')) \Rightarrow (x = x')\text{"} \text{ (c'est l'unicité),}$$

nous avons alors

$$(\exists\,! x \in E, P(x)) \equiv (R_1 \text{ et } R_2).$$

Quantificateurs mathématiques

Proposition (Équivalences logiques et quantificateurs)

Soit $P(x)$, un prédicat, nous avons les équivalences topologiques suivantes :

$$non(\forall\, x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad (\exists\, x \in E,\ non(P(x)))$$
$$non(\exists\, x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad (\forall\, x \in E,\ non(P(x)))$$

Exemple

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats sur E. Nous avons,

$non(\forall\, x \in E,\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv (\exists\, x \in E,\ (P(x)$ *et* $non(Q(x)))$

$non(\exists\, !\, x \in E,\ P(x)) \equiv (\forall x \in E\ non(P(x))$ *ou* $(\exists\, x \neq y,\ P(x) \wedge P(y)))$

Quantificateurs mathématiques

Definition (Prédicats à deux variables)

Soit $P(x, y)$ un prédicat à deux variables, $x \in E$ et $y \in F$.
L'assertion quantifiée

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in F,\ P(x, y),$$

est vraie lorsque tous les éléments $x \in E$ et tous les éléments $y \in F$, vérifient $P(x, y)$.
L'assertion quantifiée

$$\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x, y),$$

est vraie lorsqu'il existe au moins un élément $x \in E$ et qu'il existe au moins un élément $y \in F$ qui vérifient $P(x, y)$.

Quantificateurs mathématiques

Remarque

Nous pouvons combiner des quantificateurs de natures différentes. Mais attention, il faut respecter les règles suivantes :

$$(\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in F,\ P(x,y)) \quad \equiv \quad (\forall\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ P(x,y)),$$
$$(\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x,y)) \quad \equiv \quad (\exists\, y \in F,\ \exists\, x \in E,\ P(x,y)).$$

Attention :

il ne faut pas permuter des quantificateurs différents !

$$(\forall\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x,y)) \quad \not\equiv \quad (\exists\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ P(x,y)).$$

Raisonnement par hypothèse auxiliaire

Pour montrer qu'un énoncé Q est vrai, nous nous appuyons sur la tautologie suivante $(P \text{ et } (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$. C'est bien une tautologie, comme le montre la table de vérité suivante

P	Q	P ⇒ Q	P et (P ⇒ Q)	(P et (P ⇒ Q)) ⇒ Q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Table de vérité pour la tautologie (P et (P ⇒ Q)) ⇒ Q

1. Nous montrons que P est vrai (en pratique il s'agit d'un énoncé évident),
2. puis nous montrons que $P \Rightarrow Q$ est vrai,
3. nous nous retrouvons sur la première ligne de la table de vérité, ce qui montre que Q est vrai.

Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'un énoncé P est vrai, nous nous appuyons sur l'équivalence logique $((\text{non}(P) \Rightarrow Q)$ et $(\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q))) \equiv P$.
Vérifions cela dans la table de vérité ci-dessous

P	Q	non(P)	non(Q)	non(P) ⇒ Q	non(P) ⇒ non(Q)	(non(P) ⇒ Q) et (non(P) ⇒ non(Q))
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F

Table de vérité pour la tautologie (non(P) ⇒ Q) et (non(P) ⇒ non(Q))

Il paraît clair que la première et la dernière colonne sont identiques. Nous supposons alors que non(P) est vrai (lignes 3 et 4 du tableau ci-dessus), et nous cherchons alors Q, qui sous cette hypothèse serait à la fois vrai ou faux. Nous disons alors que l'on a obtenu une contradiction ou que l'hypothèse est contradictoire.

Raisonnement par l'absurde

Remarque

Dans la pratique, nous montrons que si nonP est vrai alors on aboutit à une contradiction et on en déduit que P est vrai.

Raisonnement par contraposée

Il faut montrer des résultats faisant apparaître une implication $P \Rightarrow Q$. Ce raisonnement s'appuie sur l'équivalence logique
$(P \Rightarrow Q) \equiv (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P))$. Pour montrer qu'un énoncé Q est vrai, nous utilisons l'équivalence logique ci-dessus.

Raisonnement par contre exemple

Ce raisonnement sert à montrer qu'un énoncé de la forme $\forall\, x \in E,\ \ P(x)$ est faux. Pour cela, nous montrons que sa négation est vraie. Autrement dit $\text{non}(\forall\, x \in E,\ \ P(x)) \ \equiv\ (\exists\, x \in E,\ \text{non}(P(x)))$. Pour cela nous montrons qu'il existe un élément $x \in E$ qui ne vérifie pas $P(x)$.

Exemple

1. *Montrons que* $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \forall\, \varepsilon > 0,\ \ (|x| < \varepsilon \ \Rightarrow\ x = 0)$ *est faux. La négation de cet énoncé est* $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \ \exists\, \varepsilon > 0,\ \ (|x| < \varepsilon \ \text{ et } \ x \neq 0)$. *Nous rappelons en effet que la négation de* $(P \Rightarrow Q)$ *est* $(P \text{ et non}(Q))$.
   Si $x = 1$ *et* $\varepsilon = 2$, *nous avons* $|x| < \varepsilon$ *et* $x \neq 0$, *la négation de l'énoncé est vraie, donc l'énoncé est faux.*
2. *Attention, il ne faut pas confondre* $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \forall\, \varepsilon > 0,\ \ (|x| < \varepsilon \ \Rightarrow\ x = 0)$ *avec* $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ ((\forall\, \varepsilon > 0,\ \ |x| < \varepsilon) \ \Rightarrow\ x = 0)$.

Raisonnement par récurrence

Ce raisonnement sert à montrer qu'un énoncé du genre

"pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$" est vrai.

Il y a deux méthodes pour le prouver.

1. La récurrence classique :
   1. Nous vérifions que l'assertion $P(n_0)$ est vraie.
   2. Supposons que $P(k)$ soit vraie pour un certain $k \geq n_0$. Il faut montrer $P(k+1)$ soit vraie.
2. La récurrence forte :
   1. Nous vérifions que l'assertion $P(n_0)$ est vraie.
   2. Si l'implication $\forall\ n \geq n_0,\ \ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie , alors l'assertion $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Les Applications d'un ensemble vers un autre ensemble

Applications

Soient E et F deux ensembles.

Definition

Une application $f : E \to F$, est définie pour chaque élément $x \in E$, un unique élément de F noté $f(x)$, où E est l'ensemble de départ et F est l'ensemble d'arrivée.

Exemple

1. $$\begin{array}{rccll} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ x & \mapsto & f(x) = x & & f \text{ est une application.} \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rccll} g : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} & & \\ n & \mapsto & f(n) = n - 1. & & g \text{ n'est pas une application.} \end{array}$$

Applications

Remarque

1. *Le graphe de* $f : E \to F$ *est* $\Gamma_f = \{(x; y) \in E \times F \text{ tel que } y = f(x)\}$.
2. *Soit* $f : E \to F$ *et* $g : G \to H$ *deux applications.* $f = g$ *si et seulement si* $E = G$ *et* $F = H$ *et* $\forall\, x \in E, f(x) = g(x)$.
3. *Soit* $f : E \to F$ *une application. Fixons* $y \in F$*, tout élément* $x \in E$ *tel que* $y = f(x)$ *est un antécédent de* y.

Notation

- *On note* $\mathcal{F}(E, F)$ *l'ensemble de toutes les applications de* E *dans* F.
- *On note* **id** *l'application identité*

$$\begin{array}{rccc} id : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) = x \end{array}$$

Image directe et image réciproque

Soient E et F deux ensembles.

Definition (Image directe)

Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$, l'image directe de A par f est l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x), \text{ tel que } x \in A\} \subset F.$$

Definition (Image réciproque)

Soit $B \subset F$ et $f : E \to F$, l'image réciproque de A par f est l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\} \subset E.$$

Image directe et image réciproque

Exemple

Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & f(x) = 2x + 1. \end{array}$ *Soit* $A = \{0, 1, 2\}$, *alors*

$f(A) = \{f(x)$ *tel que* $x \in A\} = \{f(0), f(1), f(2)\} = \{1, 3, 5\}$.

Soit $B = \{5\}$, *alors*

$f^{-1}(B) = \{x \in E \ t.q \ f(x) \in B\} = \{x \in E \ t.q \ f(x) = 5\} = \{2\}$.

Propriété

Soit $f : E \to F$ *une application. Soient* A_1 *et* A_2 *deux parties de* E. *Alors,*

1. $f(A_1 \bigcup A_2) = f(A_1) \bigcup f(A2)$.
2. $f(A_1 \bigcap A_2) \subset f(A_1) \bigcap f(A_2)$.
3. $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
4. $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

Image directe et image réciproque

Propriété

Soient B_1 et B_2 deux parties de F.

1. $f^{-1}(B_1 \bigcup B_2) = f^{-1}(B_1) \bigcup f^{-1}(B_2)$.
2. $f^{-1}(B_1 \bigcap B_2) = f^{-1}(B_1) \bigcap f^{-1}(B_2)$.
3. $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B1) \subset f^{-1}(B_2)$.

Injection

Definition

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est injective (ou une injection) si tout élément de F admet au plus un antécédent, c'est-à-dire, $\forall\, x, x' \in E :\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$. Ou
$\exists\, x, x' \in E :\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.

Exemple

a) *l'application* $\begin{array}{lll} f : \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ n & \mapsto 2n+1 \end{array}$ *est injective car :*

$\forall\, n, n' \in E :\ f(n) = f(n') \Longrightarrow 2n+1 = 2n'+1 \Longrightarrow 2n = 2n' \Longrightarrow n = n'$.

b) *l'application* $\begin{array}{lll} g : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 5x+3 \end{array}$ *est injective car :*

$\forall\, x, x' \in E :\ f(x) = f(x') \Longrightarrow 5x+3 = 5x'+3 \Longrightarrow 5x = 5x' \Longrightarrow x = x'$.

Surjection

Definition

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est surjective (ou une surjection) si tout élément de F admet un antécédent, c'est-à-dire, $\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E :\ f(x) = y$.

Exemple

- $\begin{array}{lll} f : \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ n & \mapsto 2n+1 \end{array}$ *f n'est pas surjective, en effet si on suppose qu'elle est surjective c'est-à-dire*

  $\forall\, y \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N} :\ f(n) = y \Longrightarrow 2n+1 = y \implies n = \dfrac{y-1}{2}$. *Ce qui est absurde car ce dernier n'est pas forcément entier.*

- $\begin{array}{lll} g : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 5x+3 \end{array}$ *g est surjective car :*

  $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R} : g(x) = y \implies 5x+3 = y \Longrightarrow x = \dfrac{y-3}{5} \in \mathbb{R}.$