Algèbre 1 Info (MAT1074L) L1 Maths-Info 2025-2026

Léon Matar Tine [1]

Automne 2025

1. Université Claude Bernard Lyon 1

- Le binôme de Newton
- Sommes doubles et produit de deux sommes finies
  - Sommes doubles

Chapitre 1 : Calculs algébriques

Rappel sur l'ensemble des nombres réels

Comme abordé au Collège puis au Lycée, l'ensemble des nombres réels est représenté en mathématique par le symbole $\mathbb{R}$.
Il existe dans $\mathbb{R}$ un ordre naturel que l'on note "$\leq$" entre les nombres et qui vérifie les trois propriétés fondamentales suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$ (Réflexivité)
2. Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$. (Transitivité).
3. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$. (Antisymétrie).

Avec cette relation d'ordre, il existe ce que l'on appelle l'ordre strict sur $\mathbb{R}$, noté "$<$" où $x < y$ si "$x \leq y$ et $x \neq y$". Cette ordre strict n'est ni réflexif ni antisymétrique.

Intervalle de $\mathbb{R}$

La relation d'ordre "$\leq$" dans $\mathbb{R}$ permet de définir les intervalles.

Definition

Soient a et b deux réels, tels que $a < b$. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble de la forme suivante :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$

Les intervalles suivants $[a, b]$; $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$ sont dit fermés.
Les intervalles $]a, b[$; $]a, +\infty[$ et $]-\infty, b[$ sont dits ouverts.
Les intervalles $[a, b[$ et $]a, b]$ ne sont ni ouverts ni fermés.

Proposition

Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $x \leq z$ *et* $y \leq t$ *alors* $x + y \leq z + t$.
2. *Si* $0 \leq x \leq y$ *et* $0 \leq z \leq t$ *alors* $0 \leq xz \leq yt$.
3. *On a* $x \leq y$ *si et seulement si* $-x \geq -y$.
4. *Si* $x \leq y$ *et* $z \leq 0$ *alors* $xz \geq yz$.

Valeur absolue

Definition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la valeur absolue de x, notée $|x|$, par :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } & x \geq 0 \\ -x \text{ si } & x < 0 \end{cases}$$

Exemple

$|-1| = 1$; $|0| = 0$; $|x+1| = x+1$ *si* $x \geq -1$ *et* $|x+1| = -x-1$ *si* $x < -1$.

Propriété

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $|x| \geq 0$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $|x| = |-x|$
- $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
- *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $a \geq 0$, $|x| \leq a$ *équivaut à* $-a \leq x \leq a$.

Valeur absolue

Théorème (Inégalités triangulaires)

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

b) $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|.$

Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum

Definition (Majorant, Minorant)

Soit A une partie composée de nombres réels. On dit que A est :

- majorée s'il existe un réel M tel que $x \leq M$ pour tout $x \in A$. On dit que M est un majorant de A
- minorée s'il existe un réel m tel que $m \leq x$ pour tout $x \in A$. On dit que m est un minorant de A
- bornée si A est à la fois majorée et minorée

Exemple

L'intervalle $]16, 17]$ *est majoré par 17 et minoré par 10 par exemple.*

Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum

Remarque

- *Une partie majorée (resp. minorée) n'admet pas un unique majorant (resp. minorant). Elle en a une infinité.*
- *Les intervalles (sauf* $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$*) sont des parties de* $\mathbb{R}$ *majorées ou minorées.*

Definition (Minimum, Maximum)

Soient A une parties de $\mathbb{R}$ et m et M deu nombres réels

- si $m \in A$ et m est un minorant de A, on dit que m est le minimun de A, noté $min(A)$
- si $M \in A$ et M est un majorant de A, on dit que M est le maximun de A, noté $max(A)$.

Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum

Exemple

- *l'intervalle* $]-1,2]$ *admet* 2 *comme maximum*
- *l'intervalle* $]-1,2[$ *est borné mais n'admet ni maximum ni minimum.*

Exercices d'application :

1. Est-ce que $[-\pi,\pi]$ admet un maximum ? un minimum ?
2. Donner l'ensemble des majorants des parties $A=]0,2[$ et $B=]-1,2]$.
3. Mettre sous forme d'intervalle les ensembles $\{x\in\mathbb{R},\ |x-1|\leq 2\}$ et $\{x\in\mathbb{R},\ |3x-4|\leq 1\}$.
4. Mettre l'intervalle $]-7,2[$ sous forme d'un ensemble utilisant une valeur absolue.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

La construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels a été formalisée pour la première fois au 19ème siècle par le mathématicien italien Giuseppe Peano et le mathématiciens allemand Richard Dedekind. Cette construction dépasse le cadre de ce cours de L1 où nous nous contenterons d'admettre l'existence de $\mathbb{N}$ et supposons qu'il vérifie les règles suivantes :

1. $\mathbb{N}$ est non vide.
2. $\mathbb{N}$ est totalement ordonné : pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, on a $i \leq j$ ou $j \leq i$.
3. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément : si A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, alors il existe a appartenant à A tel que pour tout i appartenant à A, $a \leq i$.
4. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Propriété

- *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *possède un plus petit élément, noté* 0*.*
- $\mathbb{N}\backslash\{0\}$*, l'ensemble des entiers naturels privé de* 0*, possède un plus petit élément, noté 1.*

On peut ainsi nommer les entiers successifs :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie $\{p \in \mathbb{N}, p > n\}$ possède un plus petit élément, appelé successeur de n et noté $n + 1$.
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie $\{p \in \mathbb{N}, p < n\}$ possède un plus grand élément, appelé prédécesseur de n et noté $n - 1$.

Ainsi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels.
À partir de l'ensemble $\mathbb{N}$, on peut définir l'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$, comme étant les entiers naturels et leurs opposés. Ainsi $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.
En d'autres termes, un nombre est appelé entier relatif si c'est un entier naturel ou si son opposé est un entier naturel.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Remarque

Un entier naturel est donc un entier relatif. On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Opération d'addition et de multiplication sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Pour tout a, b et c dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ on a :

- $(a+b)+c = a+(b+c)$
- $(a*b)*c = a*(b*c)$

Il s'agit de l'associativité de l'addition et de la multiplication

- $a+0 = 0+a = a$
- $a*1 = 1*a = a$

0 est l'élément neutre de l'addition et 1 celui de la multiplication.

- $a + b = b + a$
- $a * b = b * a$

Il s'agit de la commutativité de l'addition et de la multiplication

- $(a + b) * c = a * c + b * c$
- $a * (b + c) = a * b + a * c$

Il s'agit de la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication et de la multiplication par rapport à l'addition.

- Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $a' \in \mathbb{Z}$ tel que $a + a' = a' + a = 0$. On note cet élément a' par $-a$ (symétrie ou opposé).

Rappel sur les fractions et les opérations sur les fractions

Definition

Une fraction est un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

On dit que deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont égaux si et seulement si $ab' = a'b$.

Propriété (Simplification)

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, b et m appartenant à $\mathbb{Z}^*$ alors $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$.

Opérations sur les fractions

- Pour deux fractions $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ on définit la somme par la formule $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+cb}{bd}$
- Pour deux fractions $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ on définit le produit par la formule $\dfrac{a}{b}*\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$.

Definition

L'ensemble des fractions, c'est-à-dire des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, constitue l'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$ en mathématique.

Règles sur les puissances

Definition

Soient a un nombre réel non nul et m un entier strictement positif. On définit $a^m = a \times a \times a \times \cdots \times a \quad$ pris $m-$fois

Propriété

Pour deux entiers strictement positifs m et n on a :

- $a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m-fois} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n-fois} = a^{m+n}.$
- $(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{m-fois} \times \cdots \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{m-fois}}_{n-fois} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{mn-fois} = a^{mn}$
- $a^0 = 1$
- *Pour $m \in \mathbb{N}$, on peut définir a^{-m}, pour tout réel a non nul, par* $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$.

Règles sur les puissances

Ainsi, on peut généraliser les formules précédentes dans le cas où m et n sont dans $\mathbb{Z}$.
Pour deux nombres réels a et b non nuls et $m \in \mathbb{Z}$, on a aussi $(a \times b)^m = a^m \times b^m$.
Généralisation :

- Soient $a \neq 0$ un nombre réel, m un entier relatif et n un entier strictement positif. Si $a > 0$ on définit $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
- Pour a et b deux réels strictement positifs et pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$ on a : $a^x a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $(ab)^x = a^x b^x$.

Definition (Symbole $\sum$ et $\prod$)

Soit I un ensemble fini non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels. On note :

- $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.
- $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Remarque

Par convention, si $I=\emptyset$: $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = 0$ et $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i = 1$.

Cas fondamental : Si $I = [\![m, n]\!]$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$ et $m \leq n$:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n.$$

Remarque

L'indice "i" ne sert qu'à compter c'est la raison pour laquelle
$\sum_{i=1}^{n} 3i + 2 = \sum_{k=1}^{n} 3k + 2 = \sum_{s=1}^{n} 3s + 2.$

Exemple

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$; $\sum_{k=1}^{n} 28 = \underbrace{28 + 28 + \cdots + 28}_{n-fois} = 28n$
2. $$\sum_{k=0}^{n} 28 = \underbrace{28 + 28 + \cdots + 28}_{(n+1)-fois} = 28(n+1)$$
3. *somme des n premiers naturels :*
$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
4. *somme des carrés des n premiers entiers :*
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
5. *somme géométrique : pour q réel et* $q \neq 1$ *on a*
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Plus généralement, si $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leq n$ on a

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{(1 - q^{n+1-m})}{1 - q}.$$

La preuve de ce résultat découle du raisonnement suivant : On note par $S_{m,n}$ cette somme. Ainsi on écrit d'une part

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots + q^n \\ q \times S_{m,n} &= q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots + q^n + q^{n+1} \end{aligned}$$

En faisant la différence des deux lignes précédentes on trouve :

$$S_{m,n} - q \times S_{m,n} = q^m - q^{n+1} \Longrightarrow S_{m,n}(1 - q) = q^m - q^{n+1}$$

$$\Longrightarrow S_{m,n} = \frac{q^m - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Propriété (Linéarité de la somme)

Soit I, un ensemble fini, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres. On a :

1. $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$
2. *Pour tout réel λ,* $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i$.

Exemple

Soit $n \geq 5$ *un entier et* x, y *deux réels. Nommer et calculer la somme :*

- $$\sum_{k=0}^{n}(3k-2x) = \sum_{k=0}^{n} 3k - \sum_{k=0}^{n} 2x = 3\sum_{k=0}^{n} k - (n+1)2x = 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)2x = \frac{(n+1)(3n-4x)}{2}$$
- $$\sum_{s=0}^{n^2} x(s+y) = x\sum_{s=0}^{n^2}(s+y) = x\sum_{s=0}^{n^2} s + x\sum_{s=0}^{n^2} y = x\sum_{s=0}^{n^2} s + (n^2+1)xy = x\frac{(n^2+1)n^2}{2} + (n^2+1)xy = \frac{x}{2}(n^2+1)(n^2+2y).$$
- $$\sum_{i=4}^{n-1}(2^i+3) = \sum_{i=4}^{n-1} 2^i + \sum_{i=4}^{n-1} 3 = \sum_{i=4}^{n-1} 2^i + 3(n-4) = 2^4\frac{1-2^{n-4}}{1-2} + 3(n-4) = \frac{2^4-2^n}{-1} + 3(n-4) = 2^n + 3n - 28$$

Propriété (Pour le produit)

1. *Pour tout* λ *réel,* $\prod_{i \in I} \lambda = \lambda^n$ *où* n *est le nombre d'élements de* I.
2. $\prod_{i \in I} a_i b_i = (\prod_{i \in I} a_i)(\prod_{i \in I} b_i)$
3. $\prod_{i \in I} \lambda a_i = \lambda^n (\prod_{i \in I} a_i)$ *avec* n *le nombre d'éléments de* I.

Propriété (Exponentielle d'une somme)

La propriété $e^{a+b} = e^a e^b$ *se généralise à une famille de réels* $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$: $exp(\sum_{i=1}^n a_i) = \prod_{i=1}^n exp(a_i)$.

Propriété (Logarithme d'un produit)

Pour $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln(\prod_{i=1}^n b_i) = \sum_{i=1}^n \ln(b_i)$.

Sommes et produits télescopiques

Partons de la somme suivante $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3$. Si on déroule cette somme on a pour différentes valeurs de k :

$k = 1$ on a $2^3 - 1^3$

$k = 2$ on a $3^3 - 2^3$

$k = 3$ on a $4^3 - 3^3$

$\cdots \quad \cdots$

$k = n - 1$ on a $n^3 - (n-1)^3$

$k = n$ on a $(n+1)^3 - n^3$.

En faisant la somme on remarque que beaucoup de termes se télescopent et on obtient $(n+1)^3 - 1^3$. Ainsi $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3$ est une somme télescopique qui vaut après simplification $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3 = (n+1)^3 - 1$.

Sommes et produits télescopiques

Definition

Si $(u_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ est une famille de nombres, la somme $\sum_{k=m}^{n}(u_{k+1}-u_k)$ est dite somme télescopique. Cette somme vaut $\sum_{k=m}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_m$.

Sommes et produits télescopiques

Exemple

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{2(k+1)}}{(k+1)^2} - \frac{e^{2k}}{k^2} =?$. *En posant* $u_k = \dfrac{e^{2k}}{k^2}$ *alors on reconnait la somme de termes télescopiques d'où*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{2(k+1)}}{(k+1)^2} - \frac{e^{2k}}{k^2} = u_{n+1} - u_1 = \frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)^2} - e^2.$$

De même, partons du produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{e^{(k+1)^2}}{e^{k^2}} =?$. *Pour ce produit, en posant* $u_k = e^{k^2}$, *le produit précédent s'écrit*

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \cdots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *et ainsi par simplification on a*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_1} = \frac{e^{(n+1)^2}}{e}.$$

C'est ça qu'on appelle un produit télescopique.

Definition (Produit télescopique)

On dit qu'un produit $\prod_{k=0}^{n} a_k$ est télescopique si pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on peut écrire de façon simple a_k sous la forme $a_k = \frac{b_{k+1}}{b_k}$.

Soit $\prod_{k=0}^{n} \frac{b_{k+1}}{b_k}$ un produit télescopique. Alors $\prod_{k=0}^{n} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_{n+1}}{b_0}$.

Exercice

Soit $n \geq 1$ un entier et soit $y \in \mathbb{R}$. Calculer

- $U_n := \sum_{j=3}^{n} \ln(j+1) - \ln(2j)$

  Indication : On commence par remarquer que $\ln(2j) = \ln(2) + \ln(j)$ puis on remarque une somme télescopique.

- $V_n(y) := \prod_{k=1}^{n} \frac{2y(k+1)^3}{k^3}$

  Indication : ici $2y$ ne dépend pas de k donc en le sortant du produit, le reste devient un produit télescopique.

Application des sommes télescopiques

factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Preuve de la formule :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}(a-b)a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{a^{k+1}b^{n-1-k}}_{a^{k+1}b^{n-(k+1)}} - a^k b^{n-k}$$

ainsi on remarque une somme télescopique. Ce qui donne

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = a^n b^0 - a^0 b^n = a^n - b^n.$$

Remarque

- *Pour* $n = 2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- *Pour* $b = 1$ *et* $a \neq 1$, $a^n - 1 = (a-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k$

Changement d'indice

Soit la somme $\sum_{k=m}^{n} a_k$, où $a_m, \cdots, a_n$ sont des nombres. L'intervalle des indices de la somme est
$[\![m, n]\!] = \{k, k \in [\![m, n]\!]\} := \{i + 3, i \in [\![m-3, n-3]\!]\}$.
Ainsi on a l'égalité : $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m-3}^{n-3} a_{i+3}$.

Exemple

On veut faire les changements d'indices $i = k + 2$ et $j = k - n$ à la somme $S = \sum_{k=n}^{2n} \frac{e^{2k+1}}{k\sqrt{k+3}}$

- *Pour $i = k + 2$ alors $k = i - 2$ donc $S = \sum_{i=n+2}^{2n+2} \frac{e^{2i-3}}{(i-2)\sqrt{i+1}}$*
- *Pour $j = k - n$ alors $k = j + n$ donc $S = \sum_{j=0}^{n} \frac{e^{2(j+n)+1}}{(j+n)\sqrt{j+n+3}}$*

Regroupement de termes

Partons de l'exemple de la somme suivante : $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n), \quad n \geq 1.$

Ici on peut décomposer la somme en deux termes en écrivant

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \min(k, n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k, n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n(n) \\ &= \frac{n(3n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Regroupement de termes

Regardons également l'exemple suivant : soit $n \geq 1$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$? ici on remarque que :
$k = 0 \quad (-1)^0 = 1 \quad ; k = 1 \quad (-1)^1 = -1 \quad ; k = 2 \quad (-1)^2 = 1$
donc le terme $(-1)^k$ fait alterner le signe de S_n. Ainsi,
$S_n = -1 + 2^2 - 3^2 + 4^2 \cdots - (2n-1)^2 + (2n)^2$. En écrivant la somme $S_n = \underbrace{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2}_{\text{termes pairs}} - \underbrace{(1 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2)}_{\text{termes impairs}}$. On a

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2 = \underbrace{\sum_{p=0}^{n}(-1)^{2p}(2p)^2}_{k=2p} + \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{2p+1}(2p+1)^2}_{k=2p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{n} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} 4p^2 + 4p + 1 = \sum_{p=0}^{n} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} 4p - \sum_{p=0}^{n-1} 1 \\
&= 4n^2 - 4\frac{n(n-1)}{2} - n = 4n^2 - 2n^2 + 2n - n = 2n^2 + n
\end{aligned}
$$

Factorielle

Definition

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle factorielle n l'entier noté $n!$ défini par

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times (n-1) \times n$$

Remarque

- $(n+1)! = n! \times (n+1)$
- $0!$ *est un produit vide, donc* $0! = 1$
- $1! = 1\,;\ 2! = 2\,;\ 3! = 6$

Exemple

- *Si on veut calculer le produit des n premiers entiers pairs :* $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2(n-1) \times 2n$ *?*
  Attention, ce produit ne vaut pas $(2n)!$.
  Écrivons le produit :

$$\begin{aligned} & 2 \times 4 \times \cdots \times 2(n-1) \times 2n \\ = \; & 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times (n-1) \times 2 \times n \\ = \; & 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \cdots \times (n-1) \times n) \\ = \; & 2^n \times n! \end{aligned}$$

Factorielle

Exemple

- *Pour le produit des entiers impairs entre* 1 *et* $(2n+1)$ *:* $1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)$.
  Attention, de même ici ce produit de vaut pas $(2n+1)!$.
  Écrivons le produit comme suit

$$
\begin{aligned}
& 1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1) \times (2n+1) \\
= \; & \frac{1 \times 2 \times 3 \cdots \times (2n-1) \times 2n \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2(n-1) \times 2n} \\
= \; & \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}
\end{aligned}
$$

Coefficients binomiaux

Definition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ c'est-à-dire "p parmi n" par $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Remarque

- *pour* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $p \notin [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} = 0$.
- $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Coefficients binomiaux

Exemple

- $\binom{6}{2} = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} = \dfrac{5 \times 6}{1 \times 2} = 15\,;\quad \binom{7}{3} = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3}$
- $\binom{12}{4} = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4}.$

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$

Preuve

En effet si $p \in [\![0, n]\!]$ on a

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

Coefficients binomiaux

Remarque

$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1\,;\ \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n\,;\ \binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
Tout ceci par symétrie.

Théorème

(Formule de Pascal) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

La preuve est donnée ci-dessous.

Coefficients binomiaux

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$ *avec* $p \in [\![0, n]\!]$

- *Si* $p = n$ *on a* $\binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n} = 1 + 0$ *et* $\binom{n}{n} = 1$
- *Si* $p \in [\![0, n-1]\!]$, *on écrit*

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= (n-1)!\left(\frac{1}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{1}{p!(n-p-1)!}\right).\end{aligned}$$

Or d'une part $\frac{1}{(p-1)!} = \frac{p}{p(p-1)!} = \frac{p}{p!}$ *ainsi* $\frac{1}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{p}{p!(n-p)!}$.
D'autre part, $\frac{1}{(n-p-1)!} = \frac{n-p}{(n-p)!}$ *ainsi* $\frac{1}{p!(n-p-1)!} = \frac{n-p}{p!(n-p)!}$ *d'où*

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!}(p + (n-p)) = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

Coefficients binomiaux

Le corollaire (conséquence) de ce théorème est le triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0
6	1	6	15	20	15	6	1

Ainsi l'élément à la ligne n et à la colonne p s'obtient en sommant celle à la ligne $n-1$ et colonne $p-1$ et celle de la ligne $n-1$ et colone p. Dans ce tableau, la première colonne vaut 1 car $\binom{n}{0} = 1$. La diagonale du tableau vaut 1 car $\binom{n}{n} = 1$. La surdiagonale vaut 0 car $p > n$.

Remarque

La formule de Pascal permet de voir que $\binom{n}{p}$ est un entier.

Le binôme de Newton

Le binôme de Newton est une méthode pour calculer la puissance entière d'une somme. Les formules de développement connues par coeur sont $(a+b)^0 = 1; (a+b)^1 = a+b; (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
Le binôme de Newton permet de généraliser ce développement au cas $(a+b)^n$.

Théorème

Pour tout a, b réels et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p := \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

Le binôme de Newton

Exemple

$(1+x)^5$ *pour tout réel* x

$$\begin{aligned}(1+x)^5 &= \sum_{p=0}^{5}\binom{5}{p}1^p x^{5-p} = \sum_{p=0}^{5}\binom{5}{p}x^p 1^{5-p}\\ &= \binom{5}{0}x^0+\binom{5}{1}x^1+\binom{5}{2}x^2+\cdots+\binom{5}{5}x^5\\ &= x^0+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5 \text{ par le triange de Pascal.}\end{aligned}$$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *on veut calculer* $A_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$. *Ici c'est le binôme de Newton avec* $a = b = 1$. *En effet*

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \Longrightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Le binôme de Newton

Exemple

Soit à calculer $S_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p$ *?*

On a $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p 1^{n-p} = (2+1)^n = 3^n$

Exemple

Soit $S_n = \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i} (-1)^i$*? Elle ressemble à un binôme de Newton.*

En effet $\displaystyle(1+(-1))^{2n} = \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i} 1^{2n-i}(-1)^i = \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i} (-1)^i$ *ainsi*

$\displaystyle 0^{2n} = \binom{2n}{0}(-1)^0 + \binom{2n}{1}(-1)^1 + \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i}(-1)^i$. *En d'autres termes*

$\displaystyle 0 = 1 + 2n(-1) + \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i}(-1)^i$. *D'où* $\displaystyle -1 + 2n = \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i}(-1)^i$.

a) **Somme double indexée par un rectangle**

Soit $(a_{i,j})_{i\in[\![m,n]\!],j\in[\![p,q]\!]}$ une famille de nombres indexée par les entiers i et j. La somme de tous ces nombres est notée $\displaystyle\sum_{m\leq i\leq n,p\leq j\leq q} a_{ij}$. Pour cette somme, en notant par $L_i := \displaystyle\sum_{j=p}^{q} a_{ij}$ avec $i \in [\![m,n]\!]$ et par $C_j = \displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_{ij}$ avec $j \in [\![p,q]\!]$. Alors $\displaystyle\sum_{m\leq i\leq n,p\leq j\leq q} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} L_i = \sum_{j=p}^{q} C_j$.

En particulier, on a l'égalité des deux écritures

$$\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{ij} := \sum_{m\leq i\leq n,p\leq j\leq q} a_{ij}.$$

Sommes doubles

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$*, calculons* $S_n = \sum_{0 \leq i,j \leq n} 2^i$ *:*

- *D'une part*

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^i &= \sum_{i=0}^{n}(n+1)2^i = (n+1)\sum_{i=0}^{n} 2^i \\ &= (n+1)\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = (n+1)(2^{n+1}-1)\end{aligned}$$

- *D'autre part*

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{j=0}^{n} \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \sum_{j=0}^{n} 2^{n+1} - 1 = (n+1)(2^{n+1}-1)$$

b) **Somme double indexée par un triangle**

Soit $(a_{i,j})_{m\leq i\leq j\leq n}$ une famille de nombres indexée par les entiers i et j appartenant à $[\![m,n]\!]$, mais seulement pour les couples (i,j) tel que $i\leq j$.

Pour calculer la somme $\displaystyle\sum_{m\leq i\leq j\leq n} a_{ij}$ on peut poser $L_i=\displaystyle\sum_{j\geq i}^{n} a_{ij}$ et

$C_j=\displaystyle\sum_{i\leq j}^{n} a_{ij}$. Ainsi on pourra avoir deux façons d'expliciter la somme

$\displaystyle\sum_{m\leq i\leq j\leq n} a_{ij}$ soit en sommant ligne par ligne c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$ ou bien

en sommant colonne par colonne c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{ij}$.

En résumé, la somme double indexée par un triangle s'écrit :

$$\sum_{m\leq i\leq j\leq n} a_{ij}=\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}=\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{ij}.$$