Algèbre 1 Info (MAT1074L) L1 Maths-Info 2025-2026

Léon Matar Tine [1]

Automne 2025

1. Université Claude Bernard Lyon 1

1 Chapitre 1 : Calculs algébriques

- Rappel sur l'ensemble des nombres réels
  - Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
  - Intervalle de $\mathbb{R}$
  - Valeur absolue
  - Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum
- Les entiers naturels et les entiers relatifs
  - L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$
  - Opération d'addition et de multiplication sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$
- Rappel sur les fractions et les opérations sur les fractions
  - Opérations sur les fractions
- Règles sur les puissances

Chapitre 1 : Calculs algébriques

Rappel sur l'ensemble des nombres réels

Comme abordé au Collège puis au Lycée, l'ensemble des nombres réels est représenté en mathématique par le symbole $\mathbb{R}$.
Il existe dans $\mathbb{R}$ un ordre naturel que l'on note "$\leq$" entre les nombres et qui vérifie les trois propriétés fondamentales suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$ (Réflexivité)
2. Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$. (Transitivité).
3. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$. (Antisymétrie).

Avec cette relation d'ordre, il existe ce que l'on appelle l'ordre strict sur $\mathbb{R}$, noté "$<$" où $x < y$ si "$x \leq y$ et $x \neq y$". Cette ordre strict n'est ni réflexif ni antisymétrique.

Intervalle de $\mathbb{R}$

La relation d'ordre "$\leq$" dans $\mathbb{R}$ permet de définir les intervalles.

Definition

Soient a et b deux réels, tels que $a < b$. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble de la forme suivante :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$

Les intervalles suivants $[a, b]$; $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$ sont dit fermés.
Les intervalles $]a, b[$; $]a, +\infty[$ et $]-\infty, b[$ sont dits ouverts.
Les intervalles $[a, b[$ et $]a, b]$ ne sont ni ouverts ni fermés.

Proposition

Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $x \leq z$ *et* $y \leq t$ *alors* $x + y \leq z + t$.
2. *Si* $0 \leq x \leq y$ *et* $0 \leq z \leq t$ *alors* $0 \leq xz \leq yt$.
3. *On a* $x \leq y$ *si et seulement si* $-x \geq -y$.
4. *Si* $x \leq y$ *et* $z \leq 0$ *alors* $xz \geq yz$.

Valeur absolue

Definition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la valeur absolue de x, notée $|x|$, par :
$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } & x \geq 0 \\ -x \text{ si } & x < 0 \end{cases}$$

Exemple

$|-1| = 1$; $|0| = 0$; $|x+1| = x+1$ *si* $x \geq -1$ *et* $|x+1| = -x-1$ *si* $x < -1$.

Propriété

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $|x| \geq 0$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $|x| = |-x|$
- $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
- *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $a \geq 0$, $|x| \leq a$ *équivaut à* $-a \leq x \leq a$.

Valeur absolue

Théorème (Inégalités triangulaires)

a) $|x+y| \leq |x| + |y|$

b) $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x-y|$.

Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum

Definition (Majorant, Minorant)

Soit A une partie composée de nombres réels. On dit que A est :

- majorée s'il existe un réel M tel que $x \leq M$ pour tout $x \in A$. On dit que M est un majorant de A
- minorée s'il existe un réel m tel que $m \leq x$ pour tout $x \in A$. On dit que m est un minorant de A
- bornée si A est à la fois majorée et minorée

Exemple

L'intervalle $]16, 17]$ *est majoré par 17 et minoré par 10 par exemple.*

Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum

Remarque

- *Une partie majorée (resp. minorée) n'admet pas un unique majorant (resp. minorant). Elle en a une infinité.*
- *Les intervalles (sauf* $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$*) sont des parties de* $\mathbb{R}$ *majorées ou minorées.*

Definition (Minimum, Maximum)

Soient A une parties de $\mathbb{R}$ et m et M deu nombres réels

- si $m \in A$ et m est un minorant de A, on dit que m est le minimun de A, noté $min(A)$
- si $M \in A$ et M est un majorant de A, on dit que M est le maximun de A, noté $max(A)$.

Exemple

- *l'intervalle* $]-1, 2]$ *admet* 2 *comme maximum*
- *l'intervalle* $]-1, 2[$ *est borné mais n'admet ni maximum ni minimum.*

Exercices d'application :

1. Est-ce que $[-\pi, \pi]$ admet un maximum ? un minimum ?
2. Donner l'ensemble des majorants des parties $A =]0, 2[$ et $B =]-1, 2]$.
3. Mettre sous forme d'intervalle les ensembles $\{x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leq 2\}$ et $\{x \in \mathbb{R},\ |3x-4| \leq 1\}$.
4. Mettre l'intervalle $]-7, 2[$ sous forme d'un ensemble utilisant une valeur absolue.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

La construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels a été formalisée pour la première fois au 19ème siècle par le mathématicien italien Giuseppe Peano et le mathématiciens allemand Richard Dedekind. Cette construction dépasse le cadre de ce cours de L1 où nous nous contenterons d'admettre l'existence de $\mathbb{N}$ et supposons qu'il vérifie les règles suivantes :

1. $\mathbb{N}$ est non vide.
2. $\mathbb{N}$ est totalement ordonné : pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, on a $i \leq j$ ou $j \leq i$.
3. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément : si A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, alors il existe a appartenant à A tel que pour tout i appartenant à A, $a \leq i$.
4. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Propriété

- *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *possède un plus petit élément, noté* 0.
- $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, *l'ensemble des entiers naturels privé de* 0, *possède un plus petit élément, noté 1.*

On peut ainsi nommer les entiers successifs :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie $\{p \in \mathbb{N}, p > n\}$ possède un plus petit élément, appelé successeur de n et noté $n + 1$.
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie $\{p \in \mathbb{N}, p < n\}$ possède un plus grand élément, appelé prédécesseur de n et noté $n - 1$.

Ainsi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels.
À partir de l'ensemble $\mathbb{N}$, on peut définir l'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$, comme étant les entiers naturels et leurs opposés. Ainsi $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.
En d'autres termes, un nombre est appelé entier relatif si c'est un entier naturel ou si son opposé est un entier naturel.

Remarque

Un entier naturel est donc un entier relatif. On dit que $\mathbb{N}$ *est inclus dans* $\mathbb{Z}$*, ce que l'on note* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$*.*

Opération d'addition et de multiplication sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Pour tout a, b et c dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ on a :

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $(a * b) * c = a * (b * c)$

Il s'agit de l'associativité de l'addition et de la multiplication

- $a + 0 = 0 + a = a$
- $a * 1 = 1 * a = a$

0 est l'élément neutre de l'addition et 1 celui de la multiplication.

Opération d'addition et de multiplication sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

- $a + b = b + a$
- $a * b = b * a$

Il s'agit de la commutativité de l'addition et de la multiplication

- $(a + b) * c = a * c + b * c$
- $a * (b + c) = a * b + a * c$

Il s'agit de la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication et de la multiplication par rapport à l'addition.

- Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $a' \in \mathbb{Z}$ tel que $a + a' = a' + a = 0$. On note cet élément a' par $-a$ (symétrie ou opposé).

Rappel sur les fractions et les opérations sur les fractions

Definition

Une fraction est un nombre qui s'écrit sous la forme $\dfrac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

On dit que deux fractions $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{a'}{b'}$ sont égaux si et seulement si $ab' = a'b$.

Propriété (Simplification)

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, b et m appartenant à $\mathbb{Z}^*$ alors $\dfrac{am}{bm} = \dfrac{a}{b}$.

Opérations sur les fractions

- Pour deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ on définit la somme par la formule $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$
- Pour deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ on définit le produit par la formule $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Definition

L'ensemble des fractions, c'est-à-dire des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, constitue l'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$ en mathématique.

Règles sur les puissances

Definition

Soient a un nombre réel non nul et m un entier strictement positif. On définit $a^m = a \times a \times a \times \cdots \times a \quad$ pris $m-$fois

Propriété

Pour deux entiers strictement positifs m et n on a :

- $a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m-fois} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n-fois} = a^{m+n}.$
- $(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{m-fois} \times \cdots \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{m-fois}}_{n-fois} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{mn-fois} = a^{mn}$
- $a^0 = 1$
- *Pour $m \in \mathbb{N}$, on peut définir a^{-m}, pour tout réel a non nul, par* $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}.$

Règles sur les puissances

Ainsi, on peut généraliser les formules précédentes dans le cas où m et n sont dans $\mathbb{Z}$.
Pour deux nombres réels a et b non nuls et $m \in \mathbb{Z}$, on a aussi $(a \times b)^m = a^m \times b^m$.
Généralisation :

- Soient $a \neq 0$ un nombre réel, m un entier relatif et n un entier strictement positif. Si $a > 0$ on définit $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
- Pour a et b deux réels strictement positifs et pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$ on a : $a^x a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $(ab)^x = a^x b^x$.