
Examen blanc 1 - 23 Octobre 2025

Durée : on ne sait jamais

Exercice 1 Identité remarquable en action.Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| \leq 1.$$

Exercice 2 Sommes.

1. Calculer

$$\sum_{k=0}^{2025} \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right).$$

2. Exprimer ses sommes en fonction de
- n
- :

$$\textbf{a)} \sum_{k=0}^n (2k+1), \quad \textbf{b)} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k-1)^2} \right) \quad \textbf{c)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+3)},$$

Indication pour **2c)** : trouver a et b tel que $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{(k+3)}$.**Exercice 3** Binôme de Newton.Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

1. Montrer que pour tout
- $k = \{0, 1, \dots, n-1, n\}$
- , on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

2. Montrer que pour tout
- $k = \{0, 1, \dots, n-1\}$
- , on a

$$\binom{2n}{k} < \binom{2n}{n}.$$

3. Dédurre de ce qui précède que pour tout
- $k = \{0, 1, \dots, 2n\}$
- on a

$$\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}.$$

4. Trouver la valeur de la somme en fonction de
- n
- :

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}.$$

5. Montrer que

$$\frac{2^{2n}}{2n+1} < \binom{2n}{n}.$$

Exercice 4 Ensembles.

Soient A , B et C trois ensembles. On suppose que l'on a les deux inclusions suivantes :

$$A \cup B \subset A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B \subset A \cap C.$$

Montrer que $B \subset C$.

Exercice 5 Logique et ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On considère les assertions mathématiques (P) et (Q) suivantes :

$$(P) : \quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = y$$

$$(Q) : \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

1. Ecrire les négations $\text{non}(P)$ et $\text{non}(Q)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Laquelle des deux assertions (P) ou (Q) est-elle vraie ? Justifier.
3. Même question avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.

Exercice 6 Parties du plan et logique.

Soit P_1 et P_2 les parties du plan $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$P_1 = \{(x, y) \mid x + y \leq 1\},$$

$$P_2 = \{(x, y) \mid x - y \leq 1\}.$$

1. Représenter $P_1 \cap P_2$ et $P_1 \cup P_2$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.
2. Comparer les ensembles suivants :

$$(P_1 \cap P_2)^c, \quad P_1^c \cap P_2^c, \quad (P_1 \cup P_2)^c, \quad P_1^c \cup P_2^c.$$

3. Démontrer les lois de Morgan en dressant la table de vérité :

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q),$$

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q),$$

(On note $\neg P$ - "non P ", $\vee$ - "ou", $\wedge$ - "et").

Exercice 7 Quantificateurs

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E .

Écrire, en utilisant les symboles $\forall, \exists, \in, \notin, \wedge, \vee$, les assertions suivantes :

1. $A \cap B \neq \emptyset$;
2. $A \subset B$;
3. $A \not\subset B$;
4. $A = \emptyset$.