Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2025-2026
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 — Novembre 2025

Devoir surveillé N°3
Durée : 1h30

Les calculatrices, montres connectées, téléphones (etc.) ne sont pas autorisés. Le barème indiqué est approximatif.

Exercice 1 (4 points)
a) Trouver une racine réelle z_0 au polynôme $P(z) = z^3 + (i-2)z^2 - (1+i)z - 6 - 6i$.
b) Trouver toutes les racines du polynome $P(z)$.

Exercice 2 (3 points)
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $|z+1| = |z| + 1$.
b) Soient z et z' deux complexes, avec $z \neq 0$. Montrer que :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\, z' = \lambda z.$$

Exercice 3 (6 points) Soient A, B, C trois points distincts du plan d'affixe $a, b, c \in \mathbb{C}$.
On note $u = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
a) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $z \mapsto \alpha z + \beta$ la rotation d'angle $-\pi/3$ et de centre d'affixe a. Exprimer α et β en fonction de a et u.
b) Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si

$$c - ub + (u-1)a = 0 \text{ ou } c - \bar{u}b + (\bar{u}-1)a = 0.$$

c) En déduire que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Exercice 4 (3 points) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie en $+\infty$.
a) Montrer que f est bornée.
b) Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 5 (4 points) On rappelle que $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non-nuls et on considère l'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \operatorname{ch}(x)^{1/x}.$$

a) Montrer que f se prolonge en une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que g est strictement croissante.
c) En déduire que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.