Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2025-2026
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 Novembre 2025

Devoir surveillé N°3
Durée : 1h30

Les calculatrices, montres connectées, téléphones (etc.) ne sont pas autorisés. Le barème indiqué est approximatif.

Après correction, l'exercice 3.a est en boni et les points sont ajoutés aux autres exercices.

Exercice 1 (4,25 points)

a) Trouver une racine réelle z_0 au polynôme $P(z) = z^3 + (i-2)z^2 - (1+i)z - 6 - 6i$.

b) Trouver toutes les racines du polynome $P(z)$.

Solution 1 a) Soit z_0 une racine réelle. Alors $P(z_0) = 0$ et donc la partie imaginaire et la partie réelle de $P(z_0)$ s'annule. En réarrangeant les termes, on a donc $P(z_0) = (z_0^3 - 2z_0^2 - z_0 - 6) + i(z_0^2 - z_0 - 6) = 0$ si et seulement si $(R(z_0) = 0$ et $I(z_0) = 0)$ où

$$R(z_0) := z_0^3 - 2z_0^2 - z_0 - 6 \text{ et } I(z_0) := z_0^2 - z_0 - 6.$$

Le polynôme d'ordre 2, donné par $I(z_0) = z_0^2 - z_0 - 6$ se scinde aisément $z_0^2 - z_0 - 6 = (z_0 - 3)(z_0 + 2)$. On vérifie laquelle de ses racines annule le polynôme R, on a $R(3) = 27 - 18 - 3 - 6 = 0$ et $R(-2) = -8 - 8 + 2 - 6 = -20 \neq 0$. Donc $z_0 = 3$ est une racine réelle de P.

b) On sait que $P(z) = (z-3)Q(z)$ pour un polynôme d'ordre 2 dont les racines seront les deux autres racines de P. On cherche donc quel est ce polynôme Q. On écrit $P(z) = (z-3)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 - 3az^2 + cz - 3bz - 3c$. Donc

$$a = 1, b - 3a = i - 2, c - 3b = -(1+i) \text{ et } -3c = -6 - 6i.$$

On obtient $Q(z) = z^2 + (i - 2 + 3)z + 2 + 2i = z^2 + (i+1)z + 2(1+i)$. Le discriminant de Q est $\Delta = (1+i)^2 - 4(2(1+i)) = 2i - 8(1+i) = -6i - 8$. On cherche maintenant les racines carrées de Δ, c'est-à-dire les nombres complexes $u + iv$ tels que $(u + iv)^2 = \Delta$. En comparant la partie imanginaire et réelle, ça nous donne un système

$$u^2 - v^2 = -8 \text{ et } 2uv = -6.$$

On obtient deux solutions $\pm(1 - 3i)$. Les racines de Q sont donc

$$\frac{-(1+i) + (1-3i)}{2} = -2i \text{ et } \frac{-(1+i) - (1-3i)}{2} = -1 + i.$$

On a donc $P(z) = (z-3)(z - (i-1))(z + 2i)$.

Exercice 2 (3,25 points)

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $|z+1| = |z| + 1$.

b) Soient z et z' deux complexes, avec $z \neq 0$. Montrer que :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\, z' = \lambda z.$$

Solution 2 a) On a que $|z+1| = |z| + 1$ si et seulement si $|z+1|^2 = (|z|+1)^2$ si et seulement si $|z|^2 + z + \bar{z} + 1 = |z|^2 + 2|z| + 1$ si et seulement si

$$z + \bar{z} = 2|z|$$

c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = |z|$. Ceci implique que $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$ et que la partie imaginaire de z est nulle (en effet, si la partie imaginaire de z, disons $y \in \mathbb{R}$, est non nulle alors $|z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + y^2 > \mathrm{Re}(z)^2$.) Reciproquement, si z est un nombre réel non-négatif alors $|z+1| = |z| + 1$.

b) Puisque $z \neq 0$ on peut diviser par $|z|$ et on a

$$|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow |1 + \frac{z'}{z}| = 1 + |\frac{z'}{z}|.$$

Par la question précédente, l'équation de droite est équivalente à la condition que $\frac{z'}{z}$ soit un entier non-négatif que nous noterons λ. on a donc bien que

$$|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}_+,\ z' = \lambda z.$$

Exercice 3 (6 points) Soient A, B, C trois points distincts du plan d'affixe $a, b, c \in \mathbb{C}$.

On note $u = e^{i\pi/3}$.

a) (+1 point) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $z \mapsto \alpha z + \beta$ la rotation d'angle $-\pi/3$ et de centre d'affixe a. Exprimer α et β en fonction de a et u.

b) (3 points) Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si

$$c - ub + (u-1)a = 0 \text{ ou } c - \bar{u}b + (\bar{u}-1)a = 0.$$

c) (2 points) En déduire que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Solution 3 a) $\alpha z + \beta = e^{-i\pi/3}(z-a) + a = e^{-i\pi/3}z + a(1 - e^{-i\pi/3})$ donc $\alpha = e^{-i\pi/3} = \bar{u}$ et $\beta = a(1 - e^{-i\pi/3}) = a(1-\bar{u})$.

b) Soit ABC un triangle, il est equilatéral si et seulement si ses trois angles sont de mesures (non-orientées) $\pi/3$ ou si et seulement si ses trois côtés sont de même longueur.

En particulier, si ABC est un triangle équilatéral si et seulement si la rotation de centre a et d'angle $\pi/3$, ou celle de $-\pi/3$, envoie le segment AB sur AC. C'est à dire si et seulement si

$$c - a = u(b-a) \text{ ou } c - a = \bar{u}(b-a)$$

qu'on peut ré-écrire comme dans l'énoncé $c - ub + (u-1)a = 0$ ou $c - \bar{u}b + (\bar{u}-1)a = 0$.

c)Par la question précédente on a que si et seulement $c - ub + (u-1)a = 0$ ou $c - \bar{u}b + (\bar{u}-1)a = 0$ et l'unde de ces deux équation est nulle si et seulement si le produit est nul, c'est-à-dire ssi

$$(c - ub + (u-1)a)(c - \bar{u}b + (\bar{u}-1)a) = 0$$

qu'on peut développer comme

$$\begin{aligned}
0 &= (c - ub + (u-1)a)(c - \bar{u}b + (\bar{u}-1)a) \\
&= c^2 - \bar{u}cb + (\bar{u}-1)ac - ucb + |u|^2b^2 - u(\bar{u}-1)ab + (u-1)ac - \bar{u}(u-1)ab + (u-1)(\bar{u}-1)a^2 \\
&= c^2 + (-\bar{u}-u)cb + (\bar{u}-1+(u-1))ac + |u|^2b^2 + (-u(\bar{u}-1) - \bar{u}(u-1))ab + (u-1)(\bar{u}-1)a^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca
\end{aligned}$$

où la dernière expression suit le constat que $|u| = 1$ et $u + \bar{u} = 2\mathrm{Re}u = 1$.

Exercice 4 (3,25 points) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie en $+\infty$.

a) Montrer que f est bornée.

b) Atteint-elle ses bornes ?

Solution 4

a) Puisque f admet une limite, disons $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ on a, par définition de la limite, qu'il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}$

$$y \geqslant N \Longrightarrow |f(y) - \ell| < 1$$

(on a pris $\epsilon = 1$ dans la définition de la limite) et donc

$$\ell - 1 \leqslant f(y) \leqslant \ell + 1$$

pour tout $y \geqslant N$. Soit $h : [0, N] \to \mathbb{R}$, la fonction qui a $x \in [0, N]$ associe $h(x) = f(x)$. Puisque la restriction d'une fonction conitue est continue, on a que h est continue sur $[0, N]$ qui est un intervalle bornée et fermé. Par le principe du maximum h est bornée disons par $h_{\min} := \min\{h(x) \mid x \in [0, N]\}$ et $h_{\max} = \max\{h(x) \mid x \in [0, N]\}$. En combinant ces arguments, on a que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\min\{h_{\min}, \ell - 1\} \leqslant f(x) \leqslant \max\{h_{\max}, \ell + 1\}.$$

b) Pas nécessairement, par exemple $f(x) = \frac{1}{x+1}$ n'atteint pas sa limite mais la fonction constante atteint sa limite.

Exercice 5 (4,25 points) On rappelle que $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non-nuls et on considère l'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \mathrm{ch}(x)^{1/x}.$$

a) Montrer que f se prolonge en une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que g est strictement croissante.
c) En déduire que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

Solution 5 (c'est la question 4.4 du DS4 2023)

a) On remarque que $\mathrm{ch}(x) > 0$, $\mathrm{ch}(0) = 1$ et pour $x \neq 0$, $f(x) = \exp\left(\frac{\ln \mathrm{ch}(x)}{x}\right)$. Ensuite,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \mathrm{ch}(x)}{x} = (\ln \mathrm{ch})'(0) = \frac{\mathrm{sh}(0)}{\mathrm{ch}(0)} = 0.$$

Donc, puisque l'exponentielle est bijective, on a $\lim_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1$.

On pose

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Alors g est continue sur $\mathbb{R}$ puisque f l'est sur $\mathbb{R}^*$ et que $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$.

b) Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{f(x)}{x^2} h(x)$ avec $h(x) = x \tanh(x) - \ln \mathrm{ch}(x)$. On a $h(0) = 0$ et $h'(x) = x(1 - \tanh^2 x)$ qui a le signe de x puisque $|\tanh x| = |\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}| < 1$. Donc $h(x) \geqslant h(0) = 0$. On a donc $f'(x) \geqslant 0$ et g est croissante.

c) Par les questions précédentes g est continue et croissante (strictement) et donc est une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image (qui est un intervalle par continuité). On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \mathrm{ch}(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln \mathrm{ch}(x)}{x} = -1$ en remarquant que

$$\frac{\ln \mathrm{ch}(x)}{x} = \frac{\ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2}{x} = \frac{\ln(e^x(1 + e^{-2x})) - \ln 2}{x} = 1 + \frac{\ln((1 + e^{-2x})) - \ln 2}{x}$$

et de même $\frac{\ln \mathrm{ch}(x)}{x} = -1 + \frac{\ln((1+e^{2x})) - \ln 2}{x}$. On a donc que l'image de g est $[1/e, e]$.