Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2025–2025

Algèbre 1 et Analyse 1

Feuille d'exercices n° 11

POLYNÔMES

Exercice 1. Quelles sont les racines (dans $\mathbf{C}$, dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{Q}$) des polynômes suivants ?

a) $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$, b) $X^n - 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$, c) $X^6 - 4$,

d) $X^4 - 13X^2 + 36$, e) $X^4 + 6X^2 + 25$.

Exercice 2. Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes qui le divisent dans l'anneau de polynômes précisé :

a) $X + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$, b) $X^2 - 1$ dans $\mathbf{R}[X]$,

c) $X^2 + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$, d) $X^2 + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 3.

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{C}[X]$. On définit $\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k$ le polynôme conjugué de P. Montrer que, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$. En déduire que si $P \in \mathbf{R}[X]$, alors pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
2. Soit P, Q deux polynômes à coefficients complexes tels que $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $P = Q$.
3. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(x) \in \mathbf{R}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $P \in \mathbf{R}[X]$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $f_0, \dots, f_n \in \mathbf{C}$ et $x_0, \dots, x_n \in \mathbf{C}$. On suppose les x_k deux-à-deux distincts.

1. Pour tout $k = 0, \dots, n$, montrez qu'il existe un unique polynôme $Q_k(X) \in \mathbf{C}[X]$ de degré n vérifiant
$$Q_k(x_k) = 1 \quad \text{et} \quad Q_k(x_j) = 0 \text{ pour tout } j \neq k.$$
2. En utilisant les polynômes Q_k définis à la question précédentes, construisez un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré au plus n tel que
$$P(x_k) = f_k \text{ pour } k = 0, \dots, n.$$
3. Application : montrez que si $P \in \mathbf{C}[X]$ est de degré $n \in \mathbf{N}$, alors
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j} \right].$$
En supposant que $P(x) \in \mathbf{R}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, montrez que $P \in \mathbf{R}[X]$.

Exercice 5. Développer $P = (X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1) \in \mathbf{R}[X]$. En déduire une preuve que 100011 n'est pas un nombre premier.

Exercice 6. Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, et soient a et b deux réels distincts. Soient λ (respectivement, μ) le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$ (respectivement, par $X - b$). Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$. Commenter le cas $\lambda = \mu = 0$.

Exercice 7. Établir les identités, pour $n \in \mathbf{N}^*$

$$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1),$$

$$X^{2n+1} + 1 = (X + 1)(X^{2n} - X^{2n-1} + X^{2n-2} - \cdots + (-1)^p X^p \cdots - X + 1).$$

En déduire les résultats suivants

1. Si le nombre de Mersenne $M_n = 2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
2. Si le nombre de Fermat $F_n = 2^n + 1$ est premier, alors n est soit nul, soit une puissance de 2.

Exercice 8. Pour quels entiers naturels n le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$?

Exercice 9. Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles

1. $X^n + X^{n-1} + \cdots + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$,
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$,
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$, et enfin dans $\mathbf{Q}[X]$,
4. $X^4 - j$ dans $\mathbf{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$.
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 10. Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P et que $P = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2$.
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbf{R}[X]$ et sur $\mathbf{C}[X]$. *Indication : On pourra penser à effectuer la division euclidienne de P par un polynôme de degré 2 bien choisi.*

Exercice 11. Soit $a \in \mathbf{R}$, $n \in N$, et le polynôme $P = (\cos a + X \sin a)^n \in \mathbf{R}[X]$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.

Exercice 12. On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$. Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ et dans $\mathbf{R}[X]$ (on pourra utiliser judicieusement le fait que P est pair).

Exercice 13. Soit le polynôme $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + aX^2 + 4X + 1 \in \mathbf{R}[X]$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer a.
2. Montrer que -1 est racine double de P.
3. Montrer que j est racine multiple de P.
4. Factoriser P en facteurs irréductibles, d'abord dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 14. Soit θ un réel, et n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que le reste de la division euclidienne dans $\mathbf{C}[X]$ de $X^n \sin(\theta) - X\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$ par $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ est nul. Qu'en est-il dans $\mathbf{R}[X]$?

Exercice 15.

1. Calculer le PGCD unitaire des polynômes $2X^4+X^2+X+1$ et de $X^6-X^5+X^4-2X^3+3X^2-3X+1$.
2. Montrer que les polynômes $X^4 - 1$ et $X^3 + 2X^2 - X - 1$ sont premiers entre eux, et établir un relation de Bézout entre eux.
3. Soient les polynômes complexes $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ et $B = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$. Calculer leur PGCD unitaire. En déduire une relation de Bézout entre A et B. Déterminer tous les couples de polynômes (U, V) vérifiant cette identité.
4. Reprendre la question 3. avec $A = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ et $B = X^3 - X^2 + 2X - 1$.

Exercice 16. Soit n et m deux entiers. Calculer le PGCD unitaire des polynômes $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

Exercice 17. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ, μ pour que $X^2 + 1$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Solution :

P divise $X^2 + 1 \Leftrightarrow P$ divise $X - i$ et $X + i \Leftrightarrow i$ et $-i$ sont des racines de $P \Leftrightarrow P(i) = P(-i) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - i - \lambda + \mu i + 2 = 0 \\ 1 + i - \lambda - \mu i + 2 = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \ \lambda = 3, \mu = 2.$

Exercice 18. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

Exercice 19. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, et soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes (pas nécessairement distincts). On pose $e_0 = 1$ et, pour k compris entre 1 et n :

$$e_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_k}.$$

Voici quelques valeurs des e_k :

$$\begin{aligned}
e_0 &= 1,\\
e_1 &= z_1 + z_2 + \cdots + z_n,\\
e_2 &= (z_1z_2 + z_1z_3 + \cdots + z_1z_n) + (z_2z_3 + \cdots + z_2z_n) + \cdots + (z_{n-1}z_n),\\
&\ \vdots\\
e_{n-1} &= z_2\cdots z_n + z_1z_3\cdots z_n + \cdots + z_1\cdots z_{n-1},\\
e_n &= z_1z_2\cdots z_n.
\end{aligned}$$

1. Pour $n = 2$ (resp. $n = 3$), écrire explicitement e_1, e_2 (resp. e_1, e_2, e_3) et montrer que
$$(X - z_1)(X - z_2) = X^2 - e_1X + e_2 \qquad \big(\text{resp. } (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - e_1X^2 + e_2X - e_3\big).$$
2. Pour n quelconque, montrer que l'on a :
$$\prod_{j=1}^{n}(X - z_j) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k X^{n-k} .$$
3. Sachant que $2i$ et $3-i$ sont des racines de $X^3+(i+1)X^2-(8+4i)X-4+28i$, calculer la troisième racine complexe de ce polynôme.
4. Pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, déterminer sans calcul $\sum_{1\leq j\leq n} e^{2\pi ij/n}$ et $\sum_{1\leq j<k\leq n} e^{2\pi i(j+k)/n}$.

Exercice 20. Soit $P(X) = X^4 + 12X - 5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines dont la somme vaut 2.

Exercice 21. Quels sont les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 22.

1. Factoriser le polynôme $X^2 - X + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

Exercice 23. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ défini par $P(X) = X^3 + 3X^2 + 2X + i$.

1. Déterminer les racines du polynôme dérivé P'.
2. Montrer que P n'admet aucune racine réelle.
3. Déduire des questions précédentes que P admet 3 racines distinctes dans $\mathbf{C}$, notées α, β et γ.
4. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Exercice 24. On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 les racines complexes du polynôme $P(X) = X^5 - 29X^4 + 117X^3 - 11X^2 + 4X + 1$. Montrer que ces nombres sont différents de 0. Écrire le polynôme unitaire de degré 5 dont les racines sont $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, 1/\alpha_3, 1/\alpha_4$ et $1/\alpha_5$.

Exercice 25. Déterminer le PGCD unitaire de $P(X) = X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ et de $Q(X) = X^4-1$, considérés comme éléments de $\mathbf{Q}[X]$.

Exercice 26. Déterminer tous les polynômes de degré 3, divisibles par $X-1$, et tels que les restes des divisions euclidiennes par $X-2$, par $X-3$ et par $X-4$ soient égaux (mais certainement non nuls).

Exercice 27. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et considérons le polynôme à coefficients réels $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c (avec $c \neq 0$) pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

Exercice 28. Factoriser $X^6 + X^3 + 1$ sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 29. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que les polynômes $P(X) = 1+\dfrac{X}{1!}+\ldots+\dfrac{X^n}{n!}$ et $Q(X) = 1+X+X^n$ n'ont que des racines simples dans $\mathbf{C}$.

Exercice 30. Montrer que le polynôme $P = X^{163} - 24X^{57} - 6$ possède au moins une racine réelle, mais ne possède pas de racine rationnelle.

Exercice 31. Soient a, b des réels, et $P = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$?

Exercice 32.

1. Soient p_1, p_2, p_3 et p_4 quatre entiers. Trouver deux entiers q_1 et q_2 tels que $(p_1^2+p_2^2)(p_3^2+p_4^2) = q_1^2+q_2^2$. *(Indication : manipuler les nombres complexes $p_1 + ip_2$ et $p_3 + ip_4$).*
2. Soient P_1, P_2, P_3 et P_4 quatre polynômes de $\mathbf{R}[X]$. En s'inspirant de la question précédente, trouver deux polynômes réels Q_1, Q_2 tels que $(P_1^2 + P_2^2)(P_3^2 + P_4^2) = Q_1^2 + Q_2^2$.
3. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
   (a) Pour tout réel x, on a $P(x) \geq 0$.
   (b) Il existe Q_1, Q_2 dans $\mathbf{R}[X]$ tels que $P = Q_1^2 + Q_2^2$.

Exercice 33. Déterminer tous les polynômes P vérifiant les relations suivantes :

a) $P(X^2 + 1) = P(X)$,
b) $P(2X + 1) = P(X)$,
c) $(1 - X)P'(X) - P(X) = X^n$, où $n \in \mathbf{N}$,
d) $P'(X)^2 = 4P(X)$,
e) $P(P(X)) = P(X)$.

Exercice 34.

1. Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes. Montrer que $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 35. **(Polynômes de Tchebychev)** On considère la suite de polynômes $P_n(x)$ définie par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, et pour $n \in \mathbf{N}$,

$$P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. Préciser P_2, P_3, P_4.
2. Déterminer le terme de plus haut degré de P_n.
3. Étudier la parité de P_n.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on a $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Exercice 36. Soit P un polynôme réel scindé à racines simples.

1. Montrer que P' est aussi scindé à racines simples.
2. Montrer que si a et b sont respectivement la plus petite et la plus grande racine de P alors les racines de P' sont comprises entre a et b.

Exercice 37. Soit P et Q deux polynômes rationnels.

1. Montrer que $P|Q$ dans $\mathbf{Q}[X]$ si, et seulement si $P|Q$ dans $\mathbf{C}[X]$ (*en particulier, si $P \mid Q$ dans $\mathbf{C}[X]$, alors le quotient de la division de P par Q appartient à $\mathbf{Q}[X]$*).
2. Montrer que P et Q ont le même PGCD considérés comme polynômes à coefficients dans $\mathbf{Q}$ ou dans $\mathbf{C}$.
3. Montrer que si P est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$ alors P et P' sont premiers entre eux (on dit alors que $\mathbf{Q}$ est un *corps parfait*).