
Feuille d'exercices n° 4
LOGIQUE ET RAISONNEMENT

Exercice 1.

1. **Vrai-faux.** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $(6 < \frac{25}{4}) \Rightarrow (\sqrt{6} < \frac{5}{2})$.
2. $(2 = 3) \Rightarrow (4 \text{ est un nombre pair})$.
3. $(2 = 3) \Rightarrow (3 = 4)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, ((x \leq 0) \Rightarrow (x - 1 < 0))$.
5. Pour tout réel x , on a $x \leq 0$. Donc pour tout réel x , $x - 1 < 0$.

2. **Analyse-synthèse.**

1. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.
2. Déterminer les réels x strictement positifs tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Exercice 2.

1. Soit P , Q et R trois propositions. Donner la négation des propositions qui suivent.

- (a) $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$.
- (b) $P \text{ et } (\text{non}(Q) \text{ ou } R)$.

2. Montrer que les propositions qui suivent sont fausses.

- (a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (xy \neq 0 \text{ et } x \leq y) \Rightarrow \left(\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.
- (b) $\exists x \in \mathbb{R}, \left((x \leq 0) \text{ et } \left((\sqrt{x^2} \neq -x) \text{ ou } ((x+1)^2 > x^2 + 1)\right)\right)$.

Exercice 3.

1. **Contraposée.** Montrer que, pour toutes propositions P et Q ,

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)).$$

2. Montrer que, pour tous réels x et y , $(x \neq y) \Rightarrow ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1))$.

3. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair, alors n est impair.

Exercice 4.

1. Montrer la **transitivité** de l'implication, c'est-à-dire que, pour toutes propositions P , Q et R ,

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

2. (a) Montrer que, pour tout réel x , $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Rightarrow (2 \leq x \leq 3)$.
(b) Montrer que, pour tout réel x , $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Rightarrow ((x - 1)(10 - x^2) \geq 0)$.
3. Soit P , Q et R trois propositions. Démontrer que

$$(P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow P)$$

équivalent à

$$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \text{ et } (R \Rightarrow P).$$

4. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que sont équivalents :

- (a) $\forall t \in \mathbb{R}, x_0^2 + y_0^2 \leq (t - x_0)^2 + (-t - y_0)^2$;
(b) $x_0 - y_0 = 0$;
(c) $\forall t \in \mathbb{R}, x_0 t + y_0 (-t) \leq 0$.

Exercice 5.

1. **Absurde.** Montrer que, pour toutes propositions P et Q ,

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \text{non}(P \text{ et non}(Q)).$$

2. Montrer que, pour tout réel x , $(-x^4 + x^3 + x - 11 \leq 0) \Rightarrow (-x^4 + x^3 - 9 < 0)$.
3. Soit $\mathcal{P} = \{2k; k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{I} = \{2k + 1; k \in \mathbb{Z}\}$ les ensembles formés respectivement des entiers pairs et impairs. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Exercice 6.

1. Montrer que, pour toutes propositions P , Q et R ,

$$(P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et non}(Q)) \Rightarrow R).$$

2. Montrer que, pour tout réel x , $(x^3 + x^2 - x - 1 > 0) \Rightarrow ((x \leq -1) \text{ ou } (x^4 > 1))$.

Exercice 7.

1. Soit x et y deux nombres réels. Nier la proposition

$$(x = 2) \text{ et } ((x + y = 5) \text{ ou } (y \geq 3)).$$

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, ((|x - y| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)).$$

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de telles fonctions. Nier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, ((n \geq N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)).$$

Exercice 8. Examiner la véracité des propositions qui suivent.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, (x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
4. Pour tout intervalle ouvert I borné, on a : $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq I$.
5. Pour tout intervalle ouvert I borné, on a : $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in I,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq I$.
6. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, \left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \right)$.
7. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_-^*)^2, \left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \right)$.

Exercice 9. 1. Écrire l'énoncé qui traduit "La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas croissante".

2. Cet énoncé est-il équivalent à "La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante" ?

Exercice 10.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

Montrer que si $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, alors, pour tout $i \in [[1, n]]$, on a $x_i = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = x$.

Montrer qu'il existe $i \in [[1, n]]$, tel que $x_i \leq \frac{x}{n}$.

Exercice 11. Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour obtenir les énoncés vrais les plus forts.

1. $\dots x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
2. $\dots x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$.
3. $\dots x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$.
4. $\dots x \in \mathbb{N}, x \leq \pi$.
5. $\dots x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 = 0$.
6. $\dots x \in \emptyset, 2 = 3$.

Exercice 12. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$.
2. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$.
3. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$.
4. $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x^2$.
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, ((x \leq y) \Leftrightarrow (x^2 \leq y^2))$.
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, ((xy \leq x^2) \Rightarrow (y \leq x))$.

Exercice 13. On note $A = [0, 1]$. Examiner les propositions suivantes. Lorsqu'elles sont vraies, en donner une démonstration ; sinon, proposer un contre-exemple.

1. $\forall x \in A, \forall y \in A, (x + y) \in A$.
2. $\forall x \in A, \exists y \in A, (x + y) \in A$.
3. $\exists x \in A, \forall y \in A, (x + y) \in A$.

Exercice 14. On considère la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+, \forall z \in \mathbb{R}_+, ((z \leq y) \Rightarrow (z^2 \leq x^2))$.

L'écrire en français puis décider de sa véracité.

Exercice 15. Donner une preuve directe ainsi qu'une preuve par récurrence des faits suivants :

1. La somme $1 + 2 + \dots + (n-1) + n$ des n premiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'entier $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 16. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $|\sin(n\alpha)| \leq n |\sin \alpha|$. *Indication : utiliser la formule $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.*

Exercice 17.

1. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: si $n = 0$ alors $u_n = 1$, si $n > 0$ alors $u_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$.
2. Montrer que tout nombre naturel supérieur ou égal à 2 est divisible par un nombre premier.

Exercice 18. Trouver une faute dans le raisonnement :

On “montre” par récurrence que $2^n = (-1)^n$ pour tout n comme suit. On initialise avec $n = 0$.

Hérédité : les deux suites sont solution de $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$. Conclusion : $2^n = (-1)^n$.

Exercice 19.

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, puis montrer que $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, puis montrer que $\exists (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2, x^y \in \mathbb{Q}$.

Exercice 20.

1. Soient x et y deux réels distincts de 1. Montrer que si $x \neq y$, alors $\frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$.
2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.