

Feuille d'exercices n° 3

FONCTIONS USUELLES

1 LOGARITHME

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\text{a) } \ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0 \qquad \text{b) } \log_{10}(x + 2) - \log_{10}(x + 1) = \log_{10}(x - 1)$$

Exercice 2. Quel est le nombre de chiffres en base 10 du nombre $2^{43112609}$?

Exercice 3. Y a-t-il un point du graphe du logarithme népérien tel que la tangente au graphe en ce point passe par l'origine ?

Exercice 4. Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$$

Exercice 5. Démontrer que $\log_{10}(2)$ est irrationnel.

Exercice 6. Montrer que l'équation

$$\ln(1 + |x|) = \frac{1}{x - 1}$$

possède exactement une solution $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $1 < \alpha < 2$.

Exercice 7. Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \geq n^2$.

2 Exponentielle

Exercice 8. Etudier la parité des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(x) = e^x - e^{-x} \qquad \text{b) } g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \qquad \text{c) } h(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\text{a) } e^{2x} - e^x - 6 = 0 \qquad \text{b) } 3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0 \qquad \text{c) } e^{5x} + e^{3x} + e^x = 0$$

Exercice 10. Déterminer la limite en $+\infty$ des expressions suivantes :

a) $\ln(x) - e^x$ b) $\frac{x^3}{\exp(\sqrt{x})}$ c) $\frac{\ln(1 + e^x)}{\sqrt{x}}$ d) $\frac{\exp(\sqrt{x}) + 1}{\exp(x^2) + 1}$

Exercice 11.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$.
2. On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^x}{e^x - x}$.
 - (a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Calculer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
Rappel : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.
 - (c) Dresser le tableau de variations de f .
 - (d) En déduire que f atteint un maximum sur $\mathbb{R}$ puis le déterminer.

3 FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(3x) \cos^3(x)$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(-x)$ et $f(x + \pi)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f ?
2. Calculer f' et déduire le sens de variation de f sur I .
3. Tracer le graphe de f .

Exercice 13. Déterminer la valeur de

a) $\arcsin(-1/2)$ b) $\arccos(-\sqrt{2}/2)$ c) $\arctan(\sqrt{3})$
d) $\arccos(\cos(2\pi/3))$ e) $\arccos(\cos(-2\pi/3))$ f) $\arcsin(\sin(-\pi/3))$
g) $\arccos(\cos(4\pi/3))$.

Exercice 14. Donner le domaine de définition maximal des équations suivantes puis les résoudre :

a) $\sin^2(x) = 1$ b) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ c) $\arcsin(x) = \frac{\pi}{3}$

Exercice 15.

1. Tracer le graphe des fonctions $\arcsin \circ \sin$ et $\sin \circ \arcsin$.
2. Donner le domaine de définition maximal des expressions suivantes puis simplifier les :
 - a) $\tan(\arcsin x)$ b) $\sin(\arccos x)$ c) $\cos(\arctan x)$.

Exercice 16. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 17. Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$
2. Déterminer la limite de la suite

$$S_n = \sum_{p=0}^n \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$$

Exercice 18. Donner le domaine de définition maximal des fonctions suivantes. Puis, donner leur domaine de dérivabilité et calculer leur dérivée.

a) $f(x) = \sqrt{\arcsin(x)}$ b) $g(x) = \arcsin(\cos(x))$ c) $h(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

4 FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES HYPERBOLIQUES

Exercice 19. Résoudre l'équation $\cosh(x) = 2$.

Exercice 20. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sinh(1/x)$.

1. Etudier la parité de f .
2. Etudier le comportement de f en $\pm\infty$ et en 0.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
4. Justifier que pour tout $y \geq 0$ on a $\tanh(y) \leq y$. En déduire le tableau de variations de f et tracer son graphe.

Exercice 21. Déterminer les couples de réels (a, b) tels que le système suivant admette une solution :

$$\begin{cases} \cosh(x) + \cosh(y) &= a \\ \sinh(x) + \sinh(y) &= b \end{cases}$$

Exercice 22. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$ on a

$$\left(\frac{1 + \tanh(x)}{1 - \tanh(x)}\right)^n = \frac{1 + \tanh(nx)}{1 - \tanh(nx)}$$