
Feuille d'exercices n° 9
ARITHMÉTIQUE

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne de a par b pour les valeurs de a et b suivantes :

a) $a = 2867$ et $b = 6$;
b) $a = 7813$ et $b = -12$;
c) $a = -959$ et $b = 6$;
d) $a = -1733$ et $b = -5$.

Exercice 2. Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si b divise a, alors $2^b - 1$ divise $2^a - 1$.
2. On note r le reste de la division euclidienne de a par b. Montrer que $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas de couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $7a - 4b^3 = 1$. *(Indication : raisonner modulo 7).*

Exercice 4.

1. (a) Déterminer $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $7^{k_0} \equiv 1$ [12].
   (b) Déterminer $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $6^{k_0} \equiv 0$ [12].
   (c) Déterminer $(k_2, k_3) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k_2 < k_3$ et $3^{k_2} \equiv 3^{k_3}$ [12].
   (d) Déterminer les restes de la division euclidienne par 12 des nombres suivants : 7^{30}, 6^{13}, 3^{17}, 31^{77}, $19^5 + 30^{144} + 15^{10}$.
2. Démontrer que $2^{123} + 3^{121}$ est divisible par 11.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 122^{137} par 9.

Exercice 5. Déterminer le dernier chiffre de l'écriture décimale de 3^{1111}.

Exercice 6.

1. Calculer le plus grand diviseur commun de 126 et 230.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que n divise a, b et c si, et seulement si, il divise $\mathrm{pgcd}(a, b)$ et c. En déduire que
$$\mathrm{pgcd}(\mathrm{pgcd}(a, b), c) = \mathrm{pgcd}(a, \mathrm{pgcd}(b, c)).$$
   On définit alors $\mathrm{pgcd}(a, b, c) = \mathrm{pgcd}(\mathrm{pgcd}(a, b), c)$.
3. Calculer le plus grand diviseur commun des triples d'entiers suivants :

   a) $(390, 720, 450)$;
   b) $(180, 606, 750)$.

Exercice 7. Déterminer les couples d'entiers naturels (m, n) tels que

a) $\mathrm{pgcd}(m, n) = 18$ et $m + n = 360$;
b) $\mathrm{pgcd}(m, n) = 18$ et $mn = 6480$.

Exercice 8. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, alors pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on a l'équivalence : $ap = bq$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = bk$ et $q = ak$.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 9. Trouver les couples $(a, b) \in \mathbb{Z}$ solutions des équations suivantes :

a) $18a + 5b = 11$; b) $39a - 12b = 121$; c) $14a - 21b = 49$.

Exercice 10. Déterminer les solutions $n \in \mathbb{Z}$ des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} n \equiv 1 \ [20] \\ n \equiv 3 \ [7] \, ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} n \equiv 13 \ [15] \\ n \equiv 6 \ [10] \, ; \end{cases}$ c) $\begin{cases} n \equiv 11 \ [15] \\ n \equiv 6 \ [10] \, ; \end{cases}$ d) $\begin{cases} n \equiv 3 \ [224] \\ n \equiv 17 \ [119]. \end{cases}$

Exercice 11.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$ si et seulement si $\mathrm{pgcd}(a + b, ab) = 1$.
2. A-t-on, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(a + b, ab)$?

Exercice 12. Déterminer les valeurs de l'entier n pour lesquelles la fraction $\dfrac{n+2}{n+9}$ est irréductible ?

Exercice 13.

1. Soit $n > 1$ un nombre entier. Démontrer que, si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.
2. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$; cet entier est appelé n-ième nombre de Fermat.
   (a) Calculer F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$F_{n+1} = F_0 F_1 \cdots F_n + 2.$$
   (c) En déduire que F_n et F_m sont premiers entre eux si m et n sont distincts.
3. Déduire de ce qui précède une démonstration de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 14.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 12.
2. Énumérer les diviseurs de 12.

Exercice 15.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Exprimer à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de N le nombre $\sigma_0(N)$ de diviseurs positifs de N et leur somme $\sigma_1(N)$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers positifs possédant 6 diviseurs positifs dont la somme est 28.

Exercice 16. Montrer que pour tout entier n, $n^5 - n$ est divisible par 15.

Exercice 17. Montrer que $p^2 \equiv 1 \mod 24$ pour tout nombre premier p supérieur ou égal à 5.

Exercice 18. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$, et $a, b \in \mathbb{Z}$, si $a \equiv b \mod n$ alors $a^n \equiv b^n \mod n^2$.

Exercice 19. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non-négative sous-additive, i.e. pour laquelle $u_{m+n} \leq u_m + u_n$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \{\frac{u_n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$.

1. Soient $n, N \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de n par N s'écrit $n = Nq + r$ pour certains $q, r \in \mathbb{N}$ avec $r < N$. Montrer que
$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_N}{N} + \frac{u_r}{n}.$$
2. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_N}{N} + \epsilon$ à partir d'un certain rang.
3. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = \inf A$.

Exercice 20. Montrer que $\frac{\ln a}{\ln b}$ est irrationnel pour tous a, b premiers entre eux avec $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$..

Exercice 21.

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ et $l \geq 2$ entier. Montrer que si a et b sont premiers entre eux et si ab est la puissance l-ème d'un entier, alors a et b sont eux-mêmes des puissances l-èmes d'entiers.
2. Le résultat précédent est-il vrai pour des entiers $a, b \in \mathbb{Z}$?

Exercice 22. Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $x^2 + y^2 = z^2$ et $\text{pgcd}(x, y) = 1$.

1. Montrer que $\text{pgcd}(y, z) = 1$.
2. Montrer que x ou y est pair. Quitte à les permuter, on suppose désormais y pair.
3. Montrer que $y + z$ et $z - y$ sont premiers entre eux, puis que $y + z = a^2$ et $z - y = b^2$ pour certains $a, b \in \mathbb{N}^*$ impairs et premiers entre eux.
4. En déduire la forme du triplet (x, y, z).

Exercice 23. On cherche à résoudre l'équation diophantienne $x^y = y^x$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que $x \leq y$. Montrer que $x \mid y$, en factorisant x et y en produits de puissances de nombres premiers.
2. Écrire $y = xz$, et montrer que $xz = x^z$.
3. Étudier les variations de la fonction réelle $f(t) = t^{\frac{1}{t-1}}$ pour $t \geq 2$.
4. Montrer que si $z \geq 2$ est entier avec $f(z)$ entier, alors $z = 2$.
5. En déduire que les seules solutions entières de $x^y = y^x$ sont $x = y \in \mathbb{N}^*$ et $x = 2$, $y = 4$, ou $x = 4$, $y = 2$.

Exercice 24. Déterminer le PGCD des paires suivantes de nombres naturels en ne vous servant que de la division euclidienne.
$$(252, 75) \quad (300, 504) \quad (12375, 1815)$$
Écrire une identité de Bezout pour chaque paire.