
Feuille d'exercices n° 7
NOMBRES COMPLEXES

1. Calculs, partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module

Exercice 1.

- a) Calculer i^n , $n \in \mathbf{Z}$.
- b) Calculer $(1 + i)^8$.

Exercice 2.

- a) Écrire le conjugué de $z = \frac{4 - 5i}{3 + i}$, puis préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.
- b) Soit z un complexe. Exprimer le conjugué de $w = \frac{2z^2 - i}{5z + 1}$ en fonction de $\bar{z}$.

Exercice 3.

- a) Pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, exprimer $1/z$ sous forme algébrique.
- b) Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et tout $(c, d) \in \mathbf{R}^2$, déterminer l'ensemble des $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} ax - by = c, \\ bx + ay = d. \end{cases}$$

Exercice 4. On note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- a) Soit P une fonction polynômiale à coefficients réels, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel n et des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$. Soit z un nombre complexe. Montrer que si $P(z) = 0$, alors $P(\bar{z}) = 0$.
- b) Calculer $j\bar{j}$ et $j + \bar{j}$.
- c) En déduire $j(-1 - j)$, puis constater que j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Quelle est l'autre solution ?
- d) À la lumière des questions précédentes, résoudre l'équation $z^3 = 1$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.
- e) Sans calculer $1/j$ ni j^2 , utiliser la question 4. pour justifier que $\bar{j} = \frac{1}{j} = j^2$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{iz - 1}{z - i}$ soit réel.

Exercice 6. Résoudre $z^2 = \bar{z}$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

Exercice 7. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z - i| = |z + i|$ si et seulement si z est réel.

Exercice 8. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\frac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel, et préciser son module.

Exercice 9. Soient u, v et w trois nombres complexes tels que $|u| = |v| = |w| = 1$. Établir la relation :

$$|uv + vw + wu| = |u + v + w|.$$

Exercice 10.

Soient u et v deux nombres complexes distincts tous deux de module 1.

1. Montrez que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z^2 \in]-\infty, 0] \Leftrightarrow z$ est imaginaire pure.
2. Montrer que pour tout complexe z , le nombre complexe $\left(\frac{z + uv\bar{z} - (u + v)}{u - v}\right)^2$ est un nombre réel négatif ou nul.

Exercice 11.

- a) Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour quelle valeur de $t \in \mathbb{C}$ le polynôme $P(X + t)$ est-il de la forme

$$X^3 + 3pX + q$$

avec $p, q \in \mathbb{C}$?

Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à une méthode de calcul des racines du polynôme $R = X^3 + 3pX + q$, dite *méthode de Cardan*. On note α et β les deux racines, éventuellement égales, du polynôme $X^2 + qX - p^3$ et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les trois racines cubiques de α .

- b) Exprimer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de p et q .
- c) Démontrer que $\gamma_k - \frac{p}{\gamma_k}$ est une racine de R pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.
On pose : $P = X^3 + 3X^2 + 6X + 2$.
- d) Appliquer à P le procédé de la question 1.
- e) Déterminer les racines du polynôme R déduit de P , puis celles de P , en exploitant la méthode de Cardan de la question 2.

2. Autour des racines carrées

Exercice 12. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

- | | | |
|------------------------|------------------------|---------------------|
| a) $\Delta_1 = 49$ | b) $\Delta_2 = -25$ | c) $\Delta_3 = 50i$ |
| d) $\Delta_4 = 3 + 4i$ | e) $\Delta_5 = 8 - 6i$ | |

Exercice 13. Résoudre les équations du second degré suivantes :

- | | | |
|------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
| a) $z^2 + 2z + 10 = 0$ | b) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ | c) $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$. |
|------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|

Exercice 14. Résoudre l'équation suivante : $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

Exercice 15. On considère l'équation en $z \in \mathbb{C}$ suivante : $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$.

- a) Déterminer une racine réelle z_0 de cette équation.
- b) Pour $z \in \mathbb{C}$, factoriser $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i$ par $(z - z_0)$.
- c) Résoudre l'équation.

3. Forme trigonométrique, argument

Exercice 16. Écrire sous forme trigonométrique les nombres suivants :

- a) i b) $1 + i$ c) $1 - i$
d) $\sqrt{3} + i$ e) -1 f) 1

Exercice 17.

- a) Calculer le module et un argument de $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.
- b) Écrire sous forme trigonométrique $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

Exercice 18. Soient $\theta \in \mathbf{R}$ et $z = e^{i\theta}$. Déterminer la forme trigonométrique de $1+z$, puis de $1+z+z^2$.

Exercice 19. Déterminer tous les entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que

- a) $(1+i)^n \in \mathbf{R}$
- b) $(\sqrt{3}+i)^n \in i\mathbf{R}$

Exercise 20.

- a) Soient $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Démontrer l'identité

$$e^{i\theta} = \frac{1 + it}{1 - it},$$

puis exprimer $\cos \theta$ et $\sin \theta$ en fonction de t .

- b) En déduire, pour tout $x \in \mathbf{R}$, une simplification de $\cos(2 \arctan(x))$ et $\sin(2 \arctan(x))$.
- c) Démontrer que, pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$,

$$\arg(z) \equiv 2\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z) + |z|}\right) \pmod{2\pi}$$

4. Racines de l'unité

Exercice 21. Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $z^3 = -8i$ b) $z^5 - z = 0$ c) $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$
d) $z^2 \bar{z}^7 = 1$ e) $z^6 - (3+2i)z^3 + 2+2i = 0$ f) $z^8 = z + \bar{z}$

Exercice 22. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- Calculer la somme des racines n -ièmes de l'unité.
- Calculer le produit des racines n -ièmes de l'unité.

- c) On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$.

(Indication : on pourra commencer par calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k$ pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$)

Exercice 23. Soit z un nombre complexe. Prouver les identités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{18} \left(z - e^{2ik\pi/19} \right)^2 = 19z^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{18} \left| z - e^{2ik\pi/19} \right|^2 = 19(1 + |z|^2).$$

5. Angles remarquables

Exercice 24. On note $z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 + i$ puis l'on définit $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

- Écrire z_1 , z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
- En déduire des expressions de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 25.

- Résoudre algébriquement en $z \in \mathbf{C}$ l'équation $z^2 = (1 + i)$.
- En déduire des expressions de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 26. On note $\omega = e^{2i\pi/5}$.

- Quelle relation simple lie les nombres $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\omega + \frac{1}{\omega}$?
- Justifier l'identité $(\omega + \frac{1}{\omega})^2 + (\omega + \frac{1}{\omega}) - 1 = 0$.
- Calculer $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

6. D'autres applications à la trigonométrie

Exercice 27. Réduction de $a \cos x + b \sin x$.

- Soient a et b deux réels. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbf{R}_+$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}, a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \theta).$$

- Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $\cos x + \sin x = 1$.

Exercice 28. Développer $\cos(2\varphi)$ pour obtenir un polynôme en $\cos(\varphi)$, puis $\sin(3\varphi)$ pour obtenir un polynôme en $\sin(\varphi)$.

Exercice 29. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$$

7. Polygones

Exercice 30. Soient u et v deux nombres complexes. Établir l'identité suivante, dite « du parallélogramme » :

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

Pourquoi ce nom ?

Exercice 31. Soient a, b, c et d quatre nombres complexes distincts qui vérifient les deux relations :

$$a + c = b + d \quad \text{et} \quad a + ib = c + id.$$

Que peut-on dire du quadrilatère formé des quatre points ayant ces nombres complexes pour affixes ?

Exercice 32. Soient a, b et c trois nombres complexes qui sont affixes de trois points formant dans le plan un triangle équilatéral. Montrer que :

$$\left(\frac{a - c}{b - c} \right)^3 = -1.$$

Exercice 33. Soit θ un nombre réel, avec $0 \leq \theta \leq \pi$.

- a) Déterminer l'ensemble des solutions complexes de l'équation : $z^6 - 2z^3 \cos \theta + 1 = 0$.
- b) Pour quelles valeurs de θ ces solutions sont-elles les affixes des sommets d'un hexagone régulier ?

8. Transformations affines

Exercice 34. Rappeler l'expression en terme de nombres complexes des transformations suivantes :

- a) La translation de vecteur $v \in \mathbf{C}$.
- b) L'homothétie de centre $a \in \mathbf{C}$ et de rapport $\lambda \in \mathbf{R}^*$.
- c) La rotation de centre $a \in \mathbf{C}$ et d'angle $\theta \in \mathbf{R}$.
- d) La symétrie par rapport à un axe passant par $a \in \mathbf{C}$ et faisant un angle $\theta \in \mathbf{R}$ avec l'axe réel.

Exercice 35. On rappelle l'identification canonique entre $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$ via l'application affixe et sa réciproque :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \rightarrow & \mathbf{C} \\ (x, y) & \mapsto & x + iy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{R}^2 \\ z & \mapsto & (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \end{array}.$$

1. Identifier les transformations du plan ayant l'écriture complexe suivante :

- a) $f_1(z) = z + 3 - 2i$, b) $f_2(z) = e^{i2\pi/7}z$, c) $f_3(z) = e^{i2\pi/3}z - 1$,
- d) $f_4(z) = 3z - 5 + i$, e) $f_5(z) = (2 + 2i)z + 3i$.

2. Donner l'écriture complexe des transformations du plan suivantes :

- a) La translation du vecteur d'affixe $-2 + i$;
- b) La symétrie centrale du centre i ;
- c) La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1 ;
- d) L'homothétie de rapport 3 et de centre d'affixe $1 + 2i$;
- e) La similitude de rapport 2 et d'angle $\pi/3$ et de centre $1 + i$.

3. Décrire géométriquement et déterminer la nature des similitudes correspondant aux applications suivantes :

$$\varphi_1 : z \mapsto \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z + 3, \quad \varphi_2 : z \mapsto i \bar{z}.$$

4. Démontrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
5. Démontrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

Exercice 36. Soit s une similitude directe telle que $s(2 - i) = 1$ et $s(-1 + 2i) = 1 + 6i$. Déterminer une homothétie h et une rotation r telles que $s = h \circ r$. Donner l'abscisse du point fixe de s .

Exercice 37. On dit qu'un ensemble d'applications E est *stable par composition* si $f \circ g \in E$ pour toutes applications $f, g \in E$. Les ensembles suivants de transformations planes sont-ils ou non stables par composition ?

- a) L'ensemble des translations ?
- b) L'ensemble des homothéties ?
- c) L'ensemble des homothéties de rapport strictement supérieur à 1 ?
- d) L'ensemble des homothéties et des translations ?
- e) L'ensemble des symétries par rapport à des droites ?
- f) L'ensemble des rotations ?
- g) L'ensemble des symétries et des rotations ?
- h) L'ensemble des symétries, des rotations et des translations ?
- i) L'ensemble des similitudes directes ?

Exercice 38. On se place dans le plan complexe. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Soit r la transformation du plan, qui, à un point M d'abscisse z , associe le point M_0 d'abscisse $z_0 = jz + 3$.

- a) Déterminer les points invariants (points fixes) de r , et la nature de la transformation r .
- b) Soit M un point d'abscisse z . Calculer l'abscisse du point $r^2(M)$, où on note $r^2 = r \circ r$, et déterminer la nature de la transformation r^2 .
- c) Soit M un point d'abscisse z . Calculer l'abscisse du point $r^3(M)$, où $r^3 = r \circ r \circ r$. Que peut-on dire de la transformation r^{-1} du plan ?

Exercice 39. On identifie $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$. On considère la transformation $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie, pour $z \in \mathbf{C}$, par

$$f(z) = 2\bar{z} + 3 - 4i.$$

- a) Calculer le(s) point(s) fixe(s) de f .
- b) Quelle est la nature de l'application f ?
- c) Donner une équation cartésienne du cercle C de centre $1 - i$ et de rayon 2.
- d) Calculer $f(1 - i)$. En déduire une équation cartésienne de l'image de C par la transformation f .

Exercice 40. Soient f et g les deux transformations du plan complexe définies par $f(z) = -z - 2i$ et $g(z) = 2z - 1 - i$.

- a) Déterminer les points fixes de f et g .
- b) Démontrer que f et g sont deux homothéties dont on donnera le centre et le rapport.
- c) Démontrer que $f \circ g$ est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.
- d) Démontrer que ces trois centres sont alignés.

9. Quelques ensembles de points

Exercice 41. Pour chacune des relations suivantes, déterminer l'ensemble des nombres complexes z qui la vérifient :

$$\begin{array}{llll}
\text{a) } |(1-i)z - 3i| = 3 & \text{b) } |1-z| \leq 1/2 & \text{c) } \operatorname{Re}(1-z) \leq \frac{1}{2} & \text{d) } \operatorname{Re}(iz) \leq \frac{1}{2} \\
\text{e) } \left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2 & \text{f) } \left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 & \text{g) } \left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 2 & \text{h) } \left|\frac{z-3}{z-5}\right| < 2
\end{array}$$

Exercice 42. Montrer que, dans le plan complexe, l'ensemble $\left\{ \frac{1}{1+it}, t \in \mathbf{R} \right\}$ est contenu dans le cercle de centre $1/2$ et de rayon $1/2$. Est-ce le cercle tout entier ?