

Solution :

1.

a) Puisque A est non vide, alors

$$\begin{aligned}\inf A \text{ existe} &\iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq x \\ &\iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, -m \geq -x \\ &\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, M \geq -x \\ &\iff \sup -A \text{ existe.}\end{aligned}$$

Soit $x \in -A$, $-x \in A$ donc par définition de la borne inférieure $\inf A \leq -x$ et donc $\forall x \in -A$, $-\inf A \geq x$, donc par définition de la borne supérieure, $\sup(-A) \leq -\inf A$.

Soit $x \in A$, alors $-x \in -A$ donc $-x \leq \sup(-A)$. Donc $\forall x \in A$, $x \geq -\sup(-A)$, donc $-\sup(-A) \leq \inf A$. On en conclut que $\sup A = \inf A$.

b) On applique la question précédente à l'ensemble $-A$. On sait que $\inf(-A)$ existe si et seulement si $\sup(-(-A))$ existe. Or $-(-A) = A$, donc $\inf(-A)$ existe si et seulement si $\sup A$ existe. De plus $\inf(-A) = -\sup(-(-A)) = -\sup A$, d'où le résultat.

2.

a) A est majorée, donc il existe M tel que $\forall x \in A, x \leq M$. Or $B \subset A$, donc $\forall x \in B, x \in A$ et donc $x \leq M$. Donc B est majorée et non vide et possède donc une borne supérieure. Enfin, $\forall x \in B, x \in A$ donc $\forall x \in B, x \leq \sup A$, donc $\sup B \leq \sup A$.

b) A est minorée, et non vide, donc $\forall x \in A, x \geq \inf A$. Or $\forall x \in B, x \in A$, donc $x \geq \inf A$, donc d'une part B est minorée et non vide donc possède une borne inférieure, et d'autre part $\inf B \geq \inf A$.

3. Montrons que $\sup(A+B)$ existe si et seulement si $\sup A$ et $\sup B$ existent. On commence par le sens $\sup(A+B)$ existe $\iff \sup A$ et $\sup B$ existent.

On suppose donc que $\sup A$ et $\sup B$ existent. Alors $\forall (a, b) \in A \times B$, $a \leq \sup A$ et $b \leq \sup B$, donc $a + b \leq \sup A + \sup B$, donc $A+B$ est majorée, non vide, et admet donc une borne supérieure. De plus, $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$.

Traisons le sens direct par contraposée. Montrons donc que $\text{non}(\sup A \text{ et } \sup B \text{ existent}) \Rightarrow \text{non}(\sup(A+B) \text{ existe})$.

On suppose donc que A ou B n'est pas majorée. Puisque A et B jouent un rôle symétrique, on peut supposer que A n'est pas majorée (quitte à échanger les noms de A et B), c'est à dire qu'il existe une suite d'éléments de A que l'on note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Soit $b \in B$. Alors la suite $b_n = a_n + b$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, tend elle aussi vers $+\infty$ par somme des limites. Or c'est une suite d'éléments de $A+B$. Donc $A+B$ n'est pas majorée, elle n'a donc pas de borne supérieure.

Reste à prouver que lorsque ces bornes supérieures existent, $\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B$, puisqu'on a déjà montré l'inégalité inversée. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $\sup A$, et soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B qui converge vers $\sup B$. Alors la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $A+B$ qui converge vers $\sup A + \sup B$, donc $\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B$, ce qui conclut l'exercice.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f^*(y) = \sup_{x \leq y} f(x).$$

1. Illustrer la définition de f^* par des figures rapides sur différents exemples de fonctions f .
2. Déterminer f^* dans le cas où f est croissante.
3. Étudier la monotonie de f^* .

Solution :

1. Notons que f^* est toujours définie puisque f est majorée, donc admet une borne supérieure sur n'importe quel sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$.
2. Si f est croissante, alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}, f^*(y) = \sup_{x \leq y} f(x) = \max_{x \leq y} f(x) = f(y)$ donc $f^* = f$.
3. Montrons que f^* est croissante. Soit $z \geq y$. $f^*(z) = \sup_{x \leq z} f(x)$, donc $\forall x \leq z, f^*(z) \geq f(x)$. Or $\forall x \leq y$, on a que $x \leq z$ puisque $z \geq y$. Donc $\forall x \leq y, f^*(z) \geq f(x)$, et donc $\sup_{x \leq y} f^*(z) \geq \sup_{x \leq y} f(x)$. puisque l'expression $f^*(z)$ ne dépend pas de x , on a que $\sup_{x \leq y} f^*(z) = f^*(z)$ et donc $f^*(z) \geq f^*(y)$, c'est à dire que f^* est croissante.

Exercice 4. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction croissante. On veut établir que f possède un *point fixe*, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Posons

$$T = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}.$$

1. — Démontrer que T possède une borne inférieure t .
 — Démontrer que $f(t)$ minore T .
 — Établir l'inclusion $f(T) \subset T$.
 — En déduire que t est un point fixe de f .
2. Ce résultat est-il toujours vrai pour une fonction croissante de $[0, 1[$ dans $[0, 1[$?

Solution :

1. — T est une partie non vide de $\mathbb{R}$ puisque $1 \in T$, qui est minorée par 0, donc T admet une borne inférieure que l'on note t .
 — Pour tout $x \in T, t \leq x$, on a donc $f(t) \leq f(x)$ puisque f est croissante, or $x \in T$ donc $f(x) \leq x$, donc $f(t) \leq x$, c'est à dire que $f(t)$ minore T .
 — Soit $y \in f(T)$, c'est à dire que $\exists x \in T, f(x) = y$. Puisque $x \in T, y = f(x) \leq x$, donc puisque f est croissante, $f(y) \leq f(x) = y$, donc $y \in T$, donc $f(T) \subset T$.
 — Nous venons de montrer en particulier que $f(t) \in T$. Puisque c'est un minorant de T , c'est que $\inf T = f(t)$, donc $t = f(t)$ et c'est donc un point fixe.
2. Non ! La fonction définie par $f(x) = \frac{1+x}{2}$ est croissante et n'a pas de point fixe dans l'intervalle $[0, 1]$. La preuve précédente échoue parce que l'ensemble T est vide et n'a donc pas de borne inférieure !

Exercice 5. On appelle *nombre dyadique* tout nombre rationnel de la forme $\frac{m}{2^n}$, avec $m \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution : Soit $]a, b[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, c'est à dire tel que $a < b$. Montrons qu'il existe un nombre dyadique dans l'intervalle $]a, b[$. Puisque la suite de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$ converge vers 0, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{1}{2^n} < b - a$, c'est à dire $2^n b - 2^n a > 1$. C'est donc qu'il existe un entier $m \in \mathbf{Z}$ tel que $2^n a < m < 2^n b$. Et donc $a < \frac{m}{2^n} < b$. L'ensemble des nombres dyadiques est donc dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire, c'est-à-dire si elle est constante à partir d'un certain rang.

2. Soit $D \subset \mathbb{Z}$ un ensemble non vide et majoré. Montrer que D possède un plus grand élément.

Solution :

1. Si (u_n) est stationnaire à partir du rang n_0 , alors $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall n \geq n_0$, $|u_n - u_{n_0}| = 0 < \varepsilon$, donc (u_n) converge vers u_{n_0} . (Et ceci est vrai même si (u_n) est à valeur dans $\mathbb{R}$).

Réciproquement, si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq 1/4$. En particulier, on a donc que $|u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - l| + |l - u_{n_0}| \leq 1/2$. Or dans l'intervalle $[u_{n_0} - 1/2, u_{n_0} + 1/2]$ il n'existe qu'un seul entier : u_{n_0} . Donc pour tout $n \geq n_0$, u_n , qui est un entier dans cet intervalle, ne peut être que u_{n_0} . La suite est donc stationnaire.

2. Puisque D est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, D possède une borne supérieure d . Montrons que $d \in D$ et que c'est donc le plus grand élément de D . Soit (d_n) une suite d'éléments de D qui converge vers d . Puisque c'est une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$, alors d'après la question précédente elle est stationnaire. Il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $d_{n_0} = d$ et donc $d \in D$.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq N_0 \implies u_n \geq \frac{\ell}{2}$.

Solution : Par définition, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On choisit $\varepsilon = \ell/2$ et l'on a donc qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \ell/2$ et donc $\ell - \ell/2 \leq u_n - \ell \leq \ell + \ell/2$ et donc $u_n \geq \ell/2$.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle bornée et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergeant vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On suppose $\ell = 0$. Montrer que $(u_n v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers ℓ .
2. Est-ce toujours vrai si $\ell \neq 0$?

Solution :

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée, il existe donc $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|u_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, c'est qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$ puisque $\frac{\varepsilon}{M} > 0$. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, ce qui est la définition de $(u_n v_n)$ converge vers 0.
2. Non! La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée par 1, la suite définie par $v_n = 1$ converge vers 1, mais le produit des deux n'a pas de limite.

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. Étudier la convergence de la suite $(\max\{u_n, v_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ de deux manières différentes :

1. en commençant par chercher une expression simple de $\max\{x, y\}$ en fonction de x et y pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ (*Indication : on pourra s'intéresser à $\max\{x, y\} + \min\{x, y\}$ et $\max\{x, y\} - \min\{x, y\}$*) ;
2. en revenant à la définition de la limite.

Solution :

1. Si $x < y$, alors $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = y + x$. Si au contraire, $x > y$, alors $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$. Si $x = y$ bien entendu, $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$. Donc dans tous les cas, $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$. De même, $\max\{x, y\} - \min\{x, y\} = |x - y|$, pour s'en convaincre, il suffit de tester les trois cas.

Or

$$\max\{x, y\} = \frac{\max\{x, y\} + \min\{x, y\} + \max\{x, y\} - \min\{x, y\}}{2},$$

et donc

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

Ainsi puisque les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, en notant respectivement leurs limites u et v , par somme de limites et continuité de la valeur absolue, la suite $(\max\{u_n, v_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{u+v+|u-v|}{2} = \max\{u, v\}$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, et notons u et v les limites de (u_n) et (v_n) . Distinguons deux cas :
— Si $u = v$, puisque (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers u , on a d'une part

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_n - u| \leq \varepsilon,$$

et d'autre part

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |v_n - u| \leq \varepsilon$$

et donc si $n \geq n_1$ et $n \geq n_2$, c'est à dire si $n \geq n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, on a à la fois $u_n \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]$ et $v_n \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]$ donc $\max\{u_n, v_n\} \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]$ et donc en conclusion,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_3, |\max\{u_n, v_n\} - \max\{u, v\}| \leq \varepsilon,$$

c'est à dire $(\max\{u_n, v_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\max\{u, v\}$.

- si $u \neq v$, alors par symétrie du problème, supposons que $u > v$. Alors puisque $(u - v)/2 > 0$ on a d'une part

$$\exists n_4 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_4, |u_n - u| \leq (u - v)/2,$$

et d'autre part

$$\exists n_5 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_5, |v_n - v| \leq (u - v)/2,$$

et donc $\forall n \geq \max\{n_4, n_5\}$, on a $v_n \leq (u + v)/2 \leq u_n$ et donc $\max\{u_n, v_n\} = u_n$ à partir du rang $n_6 = \max\{n_4, n_5\}$. De ce fait, les deux suites partagent la même limite et donc $(\max\{u_n, v_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $u = \max\{u, v\}$.

Exercice 10. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dont le terme général est donné par :

- a) $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$, b) $u_n = \left(n + \frac{2}{n^2}\right)^3 - n^3$, c) $u_n = \left(n + \frac{1}{n}\right) \left(n - \frac{1}{n}\right) - n^2$,
d) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}$, e) $u_n = \frac{(-1)^n}{n + 1}$, f) $u_n = \frac{2n^6 + 5n + 1}{n^6 - 2}$,
g) $u_n = (-1)^n n$, h) $u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$, i) $u_n = \sqrt[n]{n}$,
j) $u_n = 2 + \frac{\sin(n) - 4}{n^2}$, k) $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$, l) $u_n = \frac{(-5)^n + n}{3^n - 1}$,
m) $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

Solution :

- a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ donc par le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^3 + 3n^2 \frac{2}{n^2} + 3n \frac{4}{n^4} + \frac{8}{n^6} - n^3 = 6 + \frac{12}{n^3} + \frac{8}{n^6}$ donc par somme de limites $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 6$.
c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 + 1 - 1 - \frac{1}{n^2} - n^2 = -\frac{1}{n^2}$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{n-1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$ et donc par somme et produit de limites, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.
e) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ donc par le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
f) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2+\frac{5}{n^5}+\frac{1}{n^6}}{1-2\frac{1}{n^5}}$ donc par somme et produit de limites, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.
g) La suite (u_n) n'a pas de limite, puisque $u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, mais $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$, limites qui ne sont pas égales.
h) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(2/3)^n - 1}{(2/3)^{n+1}}$, or $|2/3| < 1$ donc la suite géométrique de terme $(2/3)^n$ converge vers 0, et donc par somme et produit de limites, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$.
i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln(n)}$. Par croissance comparée, $\frac{1}{n} \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et donc par composition de limites, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
j) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 - \frac{5}{n^2} \leq u_n \leq 2 - \frac{3}{n^2}$, donc par le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.
k) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^1$ donc la suite est constante et converge vers son unique valeur, e .
l) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-5/3)^n + \frac{n}{3^n}}{1 - (1/3)^n}$. Par propriétés des suites géométriques, $(1/3)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par croissance comparée, $\frac{n}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et la suite $(5/3)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi la suite par somme et produit de limites, $u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, et $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$. Les limites n'étant pas égales, la suite (u_n) n'a pas de limite.
m) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n = \frac{1 \times 2 \times \dots \times n}{n \times n \times \dots \times n} \leq \frac{1}{n}$ donc d'après le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 11. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}.$$

Solution : Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

donc

$$\frac{n}{n\sqrt{1 + 1/n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n}$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 1/n}} \leq u_n \leq 1$$

Puisque $\frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, d'après le théorème des gendarmes $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

1. Étudier la convergence des suites $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{n^2+n})_{n \in \mathbb{N}}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n^2} = \sqrt{n^2} - \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor = n - n = 0$, et

$$\begin{aligned} u_{n^2+n} &= \sqrt{n^2+n} - \lfloor \sqrt{n^2+n} \rfloor \\ &= \sqrt{n^2+n} - n \quad \text{car } n^2 \leq n^2+n < (n+1)^2, \\ &= n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = n \frac{1 + \frac{1}{n} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Par somme, produit et composition de limites, $u_{n^2+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a deux sous suites qui convergent vers des valeurs différentes, alors elle ne converge pas.

Exercice 13. Irrationalité de e .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ et $v_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. Posons $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Nous allons démontrer que e est un nombre irrationnel en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe deux entiers naturels $p, q \geq 1$ tels que $e = \frac{p}{q}$.
 - Établir l'encadrement $u_n < e < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Vérifier que $q!u_q$ et $q!v_q$ sont deux nombres entiers consécutifs.
 - Conclure le raisonnement.

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

et

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{n+1} - 1 \right) \leq 0 \text{ car } 2 \leq n+1,$$

donc la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante. De plus $v_n - u_n = \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Ainsi, elles convergent vers la même limite.

2. — Puisque la suite (u_n) est strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e$. Puisque la suite (v_n) est strictement décroissante à partir du rang 2, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e < v_n$.
- Puisque $q!u_q = \sum_{p=0}^q \frac{q!}{p!} = (p+1) \times \dots \times q$, la quantité $q!u_q$ est donc un entier. De plus, $q!v_q = q!u_q + \frac{q!}{q!} = q!u_q + 1$, donc $q!v_q$ est un entier égal $q!u_q + 1$.
- Puisque $u_q < e < v_q$, on a donc $q!u_q < (q-1)!p < q!u_q + 1$, l'entier $(q-1)!p$ est donc compris strictement entre deux entiers consécutifs ce qui est impossible. Ainsi, e n'est pas rationnel.

Exercice 14.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la limite des suites de terme général :

a) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

b) $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Solution :

1. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$, définie sur $] -1, +\infty[$ et dérivable. On a d'une part $f(0) = 0$ et d'autre part pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1+(1+x)(-1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$. La fonction f est croissante sur $[0, \infty[$ et donc pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$, c'est à dire que $\ln(1+x) \geq x - \frac{1}{2}x^2$. De même, on dérive $g(x) = \ln(x+1) - x$ pour obtenir $g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} \leq 0$, et puisque $g(0) = 0$, par décroissance de g on a $\ln(x+1) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = e^{n \ln(1+1/n)}$ donc puisque la fonction exponentielle est croissante, on a

$$e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right)} \leq u_n \leq e^{\frac{n}{n}}$$

c'est à dire

$$e^{1 - \frac{1}{2n}} \leq u_n \leq e,$$

et donc d'après le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$.

- b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(v_n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$, et donc

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \frac{k^2}{n^4} \right) \leq \ln(v_n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

par conséquent

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} \leq \ln(v_n) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

On a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et $\frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. Ainsi la suite $(\ln(v_n))$ converge vers $\frac{1}{2}$ et donc par composition avec l'exponentielle, la suite (u_n) converge vers $e^{1/2}$.

Exercice 15. Somme harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution :

1. Pour tout $x \in [k, k+1]$, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$, donc $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \frac{1}{k}$.
2. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Exercice 16. Lemme de Cesàro.

1. Soit (u_n) une suite réelle. On définit la suite (v_n) dont le terme général est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (u_n) :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors (v_n) converge également vers ℓ .

2. Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer que la suite $(\frac{u_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ .
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Démontrer que la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ .

4. Déduire de ce qui précède

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

(Indication : pour la seconde suite, on pourra utiliser l'exercice 14)

Solution :

1. On suppose d'abord que $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. De plus, la suite $\frac{1}{n}$ converge vers 0. Donc il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$ et pour tout k tel que $1 \leq k \leq n_0$ on ait $\frac{|u_k - \ell|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{n_0}$. Ceci est possible parce qu'on a pris un nombre fini et fixé d'indices k (ou parce que la suite (u_n) converge et donc est bornée). Ainsi pour tout $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, on a

$$v_n - \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} (u_k - \ell) + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n (u_k - \ell)$$

et donc

$$|v_n - \ell| \leq \frac{n_0 \varepsilon}{n_0} + \frac{n - n_0 - 1}{n} \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

On suppose désormais que $l = +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n > 2M + 2$. On sait ensuite que la suite (u_n) est minorée, puisqu'elle diverge vers $+\infty$, il existe donc $m \in \mathbb{R}$ minorant la suite (u_n) et donc il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_1$ et pour tout k tel que $1 \leq k \leq n_0$ on ait $\frac{u_k}{n} \geq \frac{m}{n} \geq -\frac{1}{n_0}$, puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi pour tout $n \neq \max\{n_1, n_2\}$, on a

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n u_k \geq \frac{-n_0}{n_0} + \frac{n - n_0 - 1}{n} (2M + 2).$$

Puisque $\frac{n - n_0 - 1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, il existe un rang n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, $\frac{n - n_0 - 1}{n} > \frac{1}{2}$. Par conséquent, pour tout $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, on a $v_n \geq M$, et donc $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Si $\ell = -\infty$, alors $-u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et donc $-v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ comme on vient de le prouver, c'est à dire que $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

2. Utilisons la question précédente en introduisant les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $a_n = u_{n+1} - u_n$ et $b_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$. On a donc que $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k)$ qui est une somme télescopique : en effet, on a

$$\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^n u_{k+1} - \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=2}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^n u_k = u_{n+1} - u_1.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{u_{n+1} - u_1}{n}$. Or la suite $(\frac{u_0}{n})$ est une suite qui converge vers 0, et donc la suite (b_n) a la même convergence que la suite $(\frac{u_{n+1}}{n})$. D'après le lemme de Cesàro précédemment démontré, puisque $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on sait que $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Puisque $\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, par produit de limites la suite $(\frac{u_{n+1}}{n+1})$ tend elle aussi vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, et donc la suite $(\frac{u_n}{n})$ aussi.

3. On introduit cette fois $a_n = \ln(u_n)$, bien définie puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(\ell)$ par composition des limites si $\ell \in \mathbb{R}$, et diverge vers $+\infty$ si $\ell = +\infty$. On peut donc appliquer la question précédente à la suite (a_n) : on sait alors que $\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln \ell$ si $\ell \in \mathbb{R}$, et vers $+\infty$ si $\ell = +\infty$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{u_n} = e^{\frac{1}{n} \ln(u_n)} = e^{\frac{a_n}{n}}$, et par composition des limites, $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{\ln(\ell)} = \ell$ si $\ell \in \mathbb{R}$, et $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ si $\ell = +\infty$, ce qui conclut la preuve.

4. On pose $u_n = \binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n!)^2 (2n+2)!}{(2n)! (n+1)!^2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)!^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 4.$$

Donc d'après la question précédente, $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 4$.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons $v_n = \frac{n^n}{n!}$, et calculons :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^n (n+1)!}{n! (n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{n+1}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$$

d'après l'exercice 14. Ainsi, puisque $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{v_n}$, on sait d'après la question précédente que $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$.

Exercice 17. Suites arithmético-géométriques.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et soit $u^{(0)} \in \mathbb{R}$. On définit par récurrence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = u^{(0)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n - \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Étudier la convergence de (u_n) . (*Indication : on distinguera les cas $|a| < 1$, $a > 1$ et $a \leq -1$*).
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^n u_k$.

Solution :

1. L'équation $\alpha = a\alpha + b$ est équivalente à $\alpha(1 - a) = b$. Celle ci possède une solution, $\frac{b}{1-a}$ puisque $a \neq 1$.
2. Calculons : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - (a\alpha + b) = a(u_n - \alpha) = av_n$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison a .
3. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 a^n = (u_0 - \alpha)a^n$ et donc $u_n = v_n + \alpha = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$.
4. La convergence dépend de la valeur de a , ainsi que du signe de $(u_0 - \alpha)$.
 - Si $u_0 = \alpha$, alors la suite est constante égale à u_0 .
 - Si $u_0 \neq \alpha$, alors si $|a| < 1$ la suite converge vers α , si $a > 1$ alors la suite diverge vers l'infini du signe de $u_0 - \alpha$, et si $a \leq -1$ alors la suite n'a pas de limite.
5. Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n [(u_0 - \alpha)a^k + \alpha] = (u_0 - \alpha) \sum_{k=0}^n a^k + \sum_{k=0}^n \alpha = (u_0 - \alpha) \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + (n+1)\alpha.$$

Exercice 18.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n), & \forall n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x(1 - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dresser le tableau des variations de f et dessiner son graphe.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers un point fixe de f . Déterminer les points fixes de f . Que peut-on dire de la suite (u_n) si u_0 est l'un des points fixes de f ?
4. Montrer que les intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, 1/2[$ sont stables par f et que f est croissante sur ces intervalles. *On dit qu'un intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$.*
5. On suppose que $u_0 \in]0, 1/2[$. Montrer que la suite (u_n) est alors croissante (*On pourra s'aider de la question 3.*) En déduire la nature de la suite (u_n) . Même question si $u_0 \in] - \infty, 0[$.
6. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]1/2, +\infty[$.

Solution :

1. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 - 4x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ on a :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$-\infty$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = -2x^2 + x = x(1 - 2x)$. Dressons un tableau de signe :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
x	$-$	0	$+$	$+$	
$1 - 2x$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x) - x$	$-$	0	$+$	0	$-$

3. Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, par passage à la limite dans la relation de récurrence, on a $\ell = 2\ell(1 - \ell)$ c'est à dire $\ell = f(\ell)$. D'après le tableau de signe, les points fixes de f sont 0 et $1/2$. Si la suite démarre à un point fixe, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (u_n) est constante.

4. On a déjà montré que f est strictement croissante sur ces deux intervalles. Il suffit donc de montrer que pour tout $x < 0, f(x) < 0$ pour montrer que $] - \infty, 0[$ est stable, et que $\forall x \in]0, 1/2[, f(x) \in]0, 1/2[$. Puisque $f(0) = 0$ et $f(1/2) = 1/2$, ceci est prouvé.

5. Montrons par récurrence que de façon générale si $u_0 \in I$ où I est un intervalle stable, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$. On note $H_n : "u_n \in I$. H_0 est vraie puisque $u_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons H_n . Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, et $u_n \in I$ par hypothèse de récurrence, puisque I est stable on a donc $u_{n+1} \in I$ c'est à dire H_{n+1} , ce qui conclut la récurrence.

Ainsi dans notre cas, $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \in]0, 1/2[$, intervalle sur lequel $f(x) > x$. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, on a donc $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc strictement croissante. Elle est également majorée puisque évolue dans l'intervalle $]0, 1/2[$. Ainsi elle converge, et donc d'après la question 3, elle converge vers 0 ou $1/2$. Puisqu'elle est croissante et $u_0 > 0$, elle converge nécessairement vers $1/2$. De même, si $u_0 \in] - \infty, 0[$, c'est un intervalle stable donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in] - \infty, 0[$, intervalle sur lequel $f(x) < x$, donc (u_n) est décroissante. Si (u_n) était minorée, elle convergerait vers 0 ou $1/2$, ce qui est impossible. Elle est donc décroissante et non minorée, c'est donc qu'elle diverge vers $-\infty$.

6. Cette fois ci, l'intervalle $]1/2, +\infty[$ n'est pas stable. Au contraire, si $u_0 \in]1/2, +\infty[$, alors d'après le tableau de variation déjà dressé, $u_1 \in] - \infty, 1/2[$, et l'on est ramené au cas précédent. Précisément, puisque $f(1) = 0$, alors si $u_0 \in] - 1/2, 1[$, $u_1 \in]0, 1/2[$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1/2$, si $u_0 = 1$ alors $u_1 = 0$ et (u_n) est stationnaire à partir du rang 1, et si $u_0 > 1$, alors $u_1 \in] - \infty, 0[$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

Exercice 19.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n(u_n^2 - 1), & \forall n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(x^2 - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Répéter pour f l'étude des questions 1 à 3 de l'exercice précédent.
2. Montrer que l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ est stable par f et que f est décroissante sur cet intervalle.
3. On suppose que $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et déterminer leur monotonie en fonction du signe de u_0 (On pourra montrer que pour $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, on a $|f(x)| \leq |x|$). Montrer que ces suites sont convergentes et déterminer leurs limites.
4. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.
5. On suppose que $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Quelle est la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}[$?
6. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\infty, -\sqrt{2}[$ et lorsque $u_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$.

Solution :

1. On pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 1$ qui satisfait $f(x) = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $f(x) < 0 \iff x \in]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ et l'on a également $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Ainsi,

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$+\infty$	

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$. Dressons un tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$x^2 - 2$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x) - x$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Enfin, si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, par passage à la limite dans la relation de récurrence, on a $\ell = f(\ell)$. D'après le tableau de signe, les points fixes de f sont $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$. Si la suite démarre à un point fixe, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (u_n) est constante.

2. On a déjà démontré que f est décroissante dans cet intervalle. D'après le tableau de variation la fonction f y est donc stable si $[-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}] \subset [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ ce qui est le cas puisque $2/3 \leq 1$.

3 et 4. Puisque $f(0) = 0$, on remarque plus précisément que $f([-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]) = [0, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$ et $f([0, \frac{1}{\sqrt{3}}]) = [-\frac{2}{3\sqrt{3}}, 0]$. De fait $f \circ f([[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]]) \subset [-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$ et $f \circ f([0, \frac{1}{\sqrt{3}}]) \subset [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, donc les deux intervalles sont stables pour $f \circ f$ qui satisfait à la fois $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_n)$ et $u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$. Puisque $\sqrt{2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, on sait donc que $f(x) - x$ est positif sur l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$ et donc $f(f(x)) \geq f(x) \geq x$ également sur ce même intervalle, et de même que $f(f(x)) - x$ est négatif sur l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$.

Ainsi si $u_0 \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, alors la suite (u_{2n}) évolue dans l'intervalle $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ et est donc suite décroissante minorée, donc convergente, et ce nécessairement vers 0. De plus la suite (u_{2n+1}) évolue dans l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$, c'est donc une suite croissante majorée, donc converge également vers 0, et de fait, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$ les rôles de u_{2n} et u_{2n+1} sont inversés, mais la conclusion reste la même, les deux sous suites convergent vers 0, la suite (u_n) converge donc vers 0 pour tout $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

5. Si $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$, d'après le tableau de signe alors $u_1 = f(u_0) > u_0$. Deux cas se produisent alors : soit $u_1 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$, et l'on peut répéter le raisonnement pour u_1 , soit $u_1 \notin]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ et alors d'après le tableau de variations de f , $u_1 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}] \subset [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

Deux occurrences surviennent donc : soit $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, soit $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Dans ce cas, (u_n) serait une suite croissante majorée donc convergente, or elle ne pourrait converger que vers $-\sqrt{2}$, 0 ou $\sqrt{2}$, ce qui sont trois possibilités absurdes. Cette occurrence est donc impossible et nécessairement, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

6. (cf exercice précédent) Sur l'intervalle $] -\infty, -\sqrt{2}[$ on a $f(x) < x$ et donc par récurrence, la suite (u_n) est décroissante. Puisqu'elle ne peut converger que vers des valeurs qui ne lui sont pas accessibles, c'est que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$. De même, sur l'intervalle $] \sqrt{2}, +\infty[$ on a $f(x) > x$ et donc la suite (u_n) est croissante, et ne pouvant pas converger, c'est qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 20.

En suivant la démarche des exercices 18 et 19, étudier les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est donnée par :

- | | | |
|--------------------------|-----------------------|-----------------------------|
| a) $f(x) = x^2$, | b) $f(x) = x^2 + 1$, | c) $f(x) = \sqrt{1+x}$, |
| d) $f(x) = 1 + \ln(x)$, | e) $f(x) = e^x - 1$, | f) $f(x) = \frac{1}{2+x}$. |

Pour certaines valeurs de u_0 , la suite (u_n) peut ne pas être définie à partir d'un certain rang.

Solution : Rédaction PARTIELLE s'appuyant sur les exercices précédents.

- a) La fonction f a deux points fixes, 0 et 1. Elle est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, $f(x) \leq x \iff x \in [0, 1]$. L'intervalle $[0, 1]$ est donc stabilisé. L'intervalle $[-1, 0]$ est envoyé dans l'intervalle $[0, 1]$, et l'intervalle $] -\infty, -1[$ est envoyé dans l'intervalle $[1, +\infty[$, qui lui aussi est stabilisé. De fait, si $|u_0| > 1$ la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1 et ne pouvant pas converger vers un point fixe de f tend donc vers $+\infty$. Si $u_0 = |1|$ alors la suite est stationnaire à partir du rang 1 donc converge vers 1. Enfin, si $|u_0| < 1$, la suite est décroissante à partir du rang 1 et est bornée donc converge vers 0 (puisque 1 n'est pas accessible).

- b) Puisque l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution, $f(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi la suite (u_n) est croissante et ne peut converger puisque f n'a pas de point fixe, donc diverge vers $+\infty$.
- c) La fonction f est définie sur $I = [-1, +\infty[$, donc on se restreint à $u_0 \in I$. L'équation $f(x) = x$ a une unique solution, qui est $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Puisque f est croissante sur I , f stabilise les deux intervalles $[-1, \varphi]$ et $[\varphi, +\infty[$. Dans l'intervalle $[-1, \varphi]$, $f(x) \geq x$, et dans l'intervalle $[\varphi, +\infty[$, $f(x) \leq x$. Ainsi si $u_0 \in [\varphi, +\infty[$ la suite est décroissante et minorée donc converge vers le point fixe φ . Si $u_0 \in [-1, \varphi]$ alors la suite est croissante et majorée donc converge vers le point fixe φ . Ainsi quel que soit $u_0 \in I$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi$.
- d) Puisque f est définie sur $I =]0, +\infty[$, on se restreint à $u_0 \in I$. L'équation $f(x) = x$ a une unique solution, qui est 1. Puisque f est croissante, l'intervalle $[1, +\infty[$ est donc stabilisé. Sur I entier on a $f(x) \leq x$ donc la suite (u_n) est toujours décroissante. Ainsi si $u_0 \in [1, +\infty[$, elle converge vers 1. En revanche, si $u_0 < 1$, alors la suite étant décroissante et ne pouvant pas converger, il existe un rang n tel que $u_n < e^{-1}$, et alors $u_{n+1} < 0$ et donc la suite n'est plus définie à partir de ce rang.
- e) La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. De plus l'équation $f(x) = x$ a une unique solution, 0. Les intervalles $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$ sont donc stabilisés. De plus, sur $\mathbb{R}_-$ on a $f(x) \geq x$, et sur $\mathbb{R}_+$, $f(x) \geq x$ également. Donc la suite (u_n) est toujours croissante. Ainsi si $u_0 \in \mathbb{R}_-$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et si $u_0 > 0$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- f) La fonction f a deux points fixes, $-1 - \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$. Dressons le tableau de variation de $x \mapsto f(x) - x$:

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	-2	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x) - x$	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

et celui de f :

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	-2	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	0	$-1 - \sqrt{2}$	$-\infty$	$+\infty$	0

On voit donc que l'intervalle $] -2, +\infty[$ est stabilisé. Or f y est décroissante, donc $f \circ f$ stabilise les intervalles $] -2, -1 + \sqrt{2}]$ et $[-1 + \sqrt{2}, +\infty[$. Sur ces intervalles, $f \circ f$ est croissante et donc l'étude de $f(x) - x$ nous donne que si $u_0 \in] -2, +\infty[$, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, celle évoluant dans l'intervalle $] -2, -1 + \sqrt{2}]$ est croissante, et l'autre est décroissante. Donc les deux convergent vers $-1 + \sqrt{2}$, et donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1 + \sqrt{2}$.
Le comportement de la suite pour $u_0 < -2$ est très long à étudier !

Exercice 21.

- Montrer que : $\forall x \in [3, 5], 3 \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 5$.
- On définit $\varphi : [3, 5] \rightarrow [3, 5], x \mapsto 3 + \frac{4}{x}$.

- a) Déterminer l'ensemble des points fixes de φ .
 - b) Montrer que : $\forall x \in [3, 5], |\varphi(x) - 4| \leq \frac{|x-4|}{2}$.
3. On considère la suite $(u_n) \in [3, 5]^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3 + \frac{4}{u_n}$.
- a) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite ℓ .
 - b) Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N$, u_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près.

Solution :

1. Pour tout $x \in [3, 5]$, on a $3 \leq x \leq 5$ donc $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$ et ainsi $3 + \frac{4}{5} \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 3 + \frac{4}{3}$. Puisque $3 \leq 3 + \frac{4}{5}$ et $3 + \frac{4}{3} \leq 5$, a on bien $3 \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 5$.
2. a) On résout pour $x \in [3, 5]$,

$$\varphi(x) = x \iff 3 + \frac{4}{x} = x \iff x^2 - 3x - 4 = 0 \iff x = \frac{3 \pm 5}{2} \iff x = 4.$$

- b) Calculons pour $x \in [3, 5]$, $|\varphi(x) - 4| = \left| 3 + \frac{4}{x} - 4 \right| = \left| \frac{4-x}{x} \right| \leq \frac{|x-4|}{3} \leq \frac{|x-4|}{2}$ car $x \geq 3$.
3. a) En appliquant la question précédente à u_n , on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{2}|u_n - 4|$. Ainsi la suite $v_n = |u_n - 4|$ vérifie $v_{n+1} \leq \frac{1}{2}v_n$. Par une récurrence immédiate, ceci donne que $v_n \leq v_1 \frac{1}{2^{n-1}}$. Puisque $v_n \geq 0$, alors $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, c'est à dire $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4$.
- b) On cherche $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_N - 4| \leq 10^{-6}$, c'est à dire $v_n \leq 10^{-6}$, c'est à dire $v_1 2^{-N+1} \leq 10^{-6}$. Or $u_1 = 5$ donc $v_1 = 1$ et donc en appliquant le logarithme, $(-N+1) \ln(2) \leq -6 \ln(10)$, c'est à dire $N \geq \frac{6 \ln(10)}{\ln(2)} + 1$. N'importe quel entier supérieur à ce nombre convient, et par exemple 21 convient.

Exercice 22. Calcul approché de $\sqrt{a}$.

Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$.

1. Donner l'ensemble de définition et le tableau de variations de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$.
2. Étudier la convergence de la suite (u_n) .
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.
Calculer v_{n+1} en fonction de v_n , puis v_n en fonction de v_0 et n .
4. Montrer que, si $u_0 > \sqrt{a}$, on a $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0.v_0^{2^n}$.

Ainsi, u_n réalise une approximation de $\sqrt{a}$ à la précision $2u_0.v_0^{2^n}$.

Solution :

1. En raison du terme $\frac{1}{x}$, l'ensemble de définition de φ est $\mathbb{R}^*$. Elle est dérivable sur cet ensemble et $\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}$. On résout $\varphi'(x) = 0 \iff x^2 = a \iff x = \pm\sqrt{a}$, et $\varphi'(x) < 0 \iff x \in]-\sqrt{a}, \sqrt{a}[\setminus \{0\}$. Après le calcul des limites, on a donc

x	$-\infty$	$-\sqrt{a}$	0	$\sqrt{a}$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+ 0 -			- 0 +	
$\varphi(x)$	$-\infty \nearrow -\sqrt{a} \searrow -\infty$			$+\infty \searrow \sqrt{a} \nearrow +\infty$	

2. On remarque tout d'abord que pour tout $x > 0$, $\varphi(x) > 0$, donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Ensuite, on remarque que l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$ est stable puisque $\varphi([\sqrt{a}, +\infty[) = [\sqrt{a}, +\infty[$. Enfin, $\varphi(]0, \sqrt{a}[) = [\sqrt{a}, +\infty[$, et donc pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[$. Or $\varphi(x) - x = \frac{a-x^2}{2x}$ et donc sur l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$, on a $\varphi(x) - x \leq 0$, donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1. Elle est donc décroissante et minorée, donc converge vers un point fixe de f . D'après le tableau de variation f a deux points fixes, $\pm\sqrt{a}$. Puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{a}$.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n} - 2\sqrt{a}}{u_n + \frac{a}{u_n} + 2\sqrt{a}} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} = v_n^2.$$

Par récurrence, on montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0^{2^n}$. Notons que $|v_0| < 1$ donc $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

4. Si $u_0 > \sqrt{a}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{a}$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|u_n - \sqrt{a}|}{v_0^{2^n}} = \frac{u_n - \sqrt{a}}{v_n} = u_n + \sqrt{a} \leq u_0 + \sqrt{a} \leq 2u_0$$

puisque la suite (u_n) est décroissante, et $u_0 > \sqrt{a}$.

On a donc montré que $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0 v_0^{2^n}$.

Exercice 23.

Montrer que :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}$$

Solution : Notons $a = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$ et $b = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}$.

Analyse (non nécessaire ici) : Admettons que ces expressions aient un sens. Alors $a^2 = a + 1$, et $1 + \frac{1}{b} = b$, ce qui donne puisque $b \neq 0$, que $b^2 = b + 1$. Résolvons l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. On calcule $\Delta = 1 + 4 = 5$, donc cette équation a deux solutions réelles qui sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Or $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, donc si a et b existent, alors $a = b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. On note $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Synthèse : Prouvons désormais que a et b ont bien un sens. On définit les suites par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = g(v_n)$ avec $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $f(x) = \sqrt{1 + x}$, et $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Puisque f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $\mathbb{R}_+$ est stable. De plus, sur cet intervalle, $f(x) - x \geq 0 \iff x \leq \varphi$, et puisque φ est un point fixe de f , alors $[1, \varphi]$ est stable par f donc la suite (u_n) est croissante et majorée et converge vers

un point fixe de f dans cet intervalle, à savoir φ . Donc $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et l'on vient de remonter que $a = \varphi$.

On montre pour g que $g \circ g$ est une fonction qui stabilise les intervalles $[0, \varphi[$ et $] \varphi, +\infty[$, et telle que $g \circ g(x) - x \geq 0 \iff x \leq \phi$. Par conséquent, les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont monotones, l'une croissante et majorée, l'autre décroissante et minorée. Elles convergent donc chacune vers un point fixe de $g \circ g$, qui ne peut être que φ . Ainsi, $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \varphi$.

Exercice 24. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \sum_{i=1}^n a_i x^i \end{array} .$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle converge.

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable, et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'_n(x) = -\sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'_n(x) < 0$, et donc f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f_n(0) = 1$ et $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, alors f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $] -\infty, 1]$. Donc il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = -a_{n+1}x^{n+1} \leq 0$. Donc $0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1})$. De plus, f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc $f_n(x_{n+1}) \geq 0 = f_n(x_n) \implies x_{n+1} \leq x_n$. La suite (x_n) est donc décroissante.
3. Cette suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

Exercice 25.

Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in] -\pi/2, \pi/2[$.

1. Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n .
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Solution :

1. Posons $f(x) = x + \tan x$ pour tout $x \in I =] -\pi/2, \pi/2[$. Cette fonction est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$. Puisque $f'(x) > 0$ sur l'intervalle I et que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\pi/2} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} +\infty$ par somme de limites, f réalise donc une bijection de I dans $\mathbb{R}$. Ainsi pour tout entier naturel n , l'équation $E_n : f(x) = n$ admet une unique solution.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$. Puisque f est croissante, c'est que $x_{n+1} > x_n$. Ainsi la suite (x_n) est croissante, et majorée puisque évoluant dans l'intervalle I . Par conséquent, elle converge vers $\ell \in] -\pi/2, \pi/2[$. Or si $\ell \in] -\pi/2, \pi/2[$, par continuité de la fonction f , $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$, ce qui est absurde puisque $f(x_n) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. C'est donc que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi/2$.

Exercice 26.

Soient I un intervalle et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ admet une unique solution x_n ;
- la fonction f_n est strictement croissante sur I ;
- pour tout $x \in I$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

1. Conjecturer, à partir d'un dessin, le sens de monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Démontrer rigoureusement cette conjecture.
3. Application : considérer la suite des fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x^n \ln(x) - 1$.

Solution :

2. Montrons que la suite (x_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait d'une part que $f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. De plus, $f_n(x_{n+1}) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$, par hypothèse, donc $f_n(x_{n+1}) \leq 0$. Puisque f_n est strictement croissante sur I , c'est donc que $x_{n+1} \leq x_n$. Donc la suite (x_n) est décroissante.
3. On pose donc $f_n(x) = x^n \ln(x) - 1$, pour tout $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est une fonction dérivable et $f'_n(x) = nx^{n-1} \ln(x) + x^{n-1} = x^{n-1}(1 + n \ln(x))$. En particulier, cette quantité est du signe de $1 + n \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $1 + n \ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq -\frac{1}{n} \iff x \geq e^{-1/n}$ car la fonction exponentielle est croissante. On cherche un intervalle I sur lequel toutes les fonctions f_n sont strictement croissantes. Puisque $e^{-1/n} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'intervalle $I = [1, +\infty[$ convient. De plus, $f_n(1) = -1$ et $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc f_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ dans $] -1, +\infty[$ et en particulier l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $I = [1, +\infty[$.
De plus, sur cet intervalle, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} \ln(x) - 1 - x^n \ln(x) + 1 = x^{n-1} \ln(x)(x - 1) \geq 0$, donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ pour tout $x \in I$. D'après la question 2, on sait alors que la suite (x_n) des solutions de $f_n(x) = 0$ existe et est décroissante. De plus, puisque I est minoré, elle est convergente.

Exercice 27.

Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$. Étudier la convergence de la suite (x_n) .

Solution : On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$. Pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) > 0$. De plus, $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, et donc f réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. Ainsi pour tout $b \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $[0, +\infty[$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$. Puisque f est croissante, c'est que $x_{n+1} > x_n$. Ainsi la suite (x_n) est croissante. Ainsi soit elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$, soit elle diverge vers $+\infty$. Or si $\ell \in \mathbb{R}_+$, par continuité de la fonction f , $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$, ce qui est absurde puisque $f(x_n) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. C'est donc que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.