Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2024–2025

Algèbre 1 et Analyse 1

Feuille d'exercices n° 8

CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

Exercice 1. Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, $x_0 \in]a,b[$ et $f :]a,b[\to \mathbf{R}$. On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I inclus dans $]a,b[$ et contenant x_0, tel que $\forall x \in I,\ f(x) > 0$.

Solution : f est continue en x_0 : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que :

$$|x_0 - y| < \delta \implies |f(x_0) - f(y)| < \epsilon.$$

On choisit $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ alors il existe un $\delta > 0$ tel que $\forall y \in]a,b[, |x_0 - y| < \delta \implies |f(x_0) - f(y)| < \frac{f(x_0)}{2}$
$\implies \forall y \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x_0) - f(y) < \frac{f(x_0)}{2}$
$\implies \forall y \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, 0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(y)$
Donc, en prenant l'ouvert $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap]a,b[$ on a bien : $f(y) > 0\ \forall y \in I$.

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

1. $f : [0,2] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases}$
2. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.
3. $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$, où E est la fonction «partie entière».
4. $f : [-2,2] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Solution :
1. f est continue sur $[0,1[$ et à gauche de 1 par continuité de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}$.
Ensuite, f est continue sur $]1,2]$ et à droite de 1 par continuité de $x \mapsto 2x - 1$ donc il suffit de tester la limite à droite en 1 :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x - 1 = 1 = f(1).$$

Par conséquent, f est continue sur $[0,2]$.

2.f est continue sur $\mathbf{R}^*$ par continuité de la fonction $x \mapsto x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, il faut donc tester la continuité en 0 .
Sur $\mathbf{R}^{+*}, f(x) = x + \frac{|x|}{x} = x + 1$, donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(1)$.
Sur $\mathbf{R}^{-*}, f(x) = x + \frac{|x|}{x} = x - 1$, donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1 \neq f(1)$. Conclusion : f est discontinue en 0.

3. Si $x \in]1, +\infty[$ on a $\frac{1}{x} \in]0,1[$ et donc $f(x) = xE(\frac{1}{x}) = 0$ alors, f est continue sur $]1, +\infty[$.
Si mainteanant $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ on a $\frac{1}{x} \in [n; n+1[$, et donc $f(x) = nx$. f est alors continue sur les intervalles de la forme $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ il nous reste maintenant qu'à tester la continuité aux points de la forme $1/n$ avec

$n \in \mathbf{N}$ et en 0.
On a $\lim\limits_{x \to (1/n)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (1/n)^+} x(n-1) = \lim\limits_{x \to (1/n)^+} \frac{n-1}{n}$ et $\lim\limits_{x \to (1/n)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (1/n)^-} xn = 1$. Donc f n'est pas continue en $(1/n), \forall n \in \mathbf{N}$.
On a finalement, $\forall x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $\frac{n}{n+1} < f(x) \leq 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(1)$ ainsi f est continue à droite en 0.
4. f est continue sur $[-2, 2] \setminus \{0\}$ par continuité de la fonction $x \mapsto x^2 sin(\frac{\pi}{x})$
Maintenant il suffit de tester la continuité en 0.
On a $|f(x)| \leq x^2$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Exercice 3.

1. Montrer que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

   alors f est surjective.
2. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré impair. Montrer que P admet une racine réelle.
3. Donner un exemple de polynôme à coefficients réels, de degré pair, n'admettant pas de racine réelle.

Solutions :
1. f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}\ f(x) = y$.
Soit maintenant $y \in \mathbf{R}$, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors il est existe $z \in \mathbf{R}$ tel que $f(z) \geq y$, de même il existe $p \in \mathbf{R}$ tel que $f(p) \leq y$. Par le théorème des valeurs intermédiares il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = y$.
2. Soit P un polynôme de degré impair, quitte à considérer $-P$, on peut supposer que le coefficient dominant est strictement positive, dans ce cas on a :

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$$

Donc P est surjective (d'après la question.1), en particulier $P(x) = 0$ admet ou moins une solution dans $\mathbf{R}$.
3. $x \mapsto x^2 + 1$ ou tout simplement $x \mapsto c$, avec c une constante $\neq 0$.

Exercice 4. Montrer qu'il existe $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ tel que

$$\tan(x) + \frac{x}{3} = 0.$$

Solutions :

On considère la fonction f définie sur $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ dans $\mathbf{R}$ par : $f(x) = tan(x) + \frac{x}{3}$.
On a $f(\pi) = tan(\pi) + \frac{\pi}{3} = 0 + \frac{\pi}{3} > 0$, et $f(\frac{3\pi}{4}) = tan(\frac{3\pi}{4}) + \frac{\frac{3\pi}{4}}{3} = \frac{sin(\frac{3\pi}{4})}{cos(\frac{3\pi}{4})} + \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\pi}{4} = -1 + \frac{\pi}{4} < 0$.
Par le théorème des valeus intermédiares, il existe $x \in [\frac{3\pi}{4}, \pi]$ tel que : $f(x) = 0$.

Exercice 5.

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application continue, telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$. Montrer que f possède un point fixe.
2. Soit $g : [0,1] \to [0,1]$ une application. On suppose que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ tels que $x \neq y$, on a $|g(x) - g(y)| < |x - y|$. Montrer que g admet un unique point fixe.

Solutions :

1. On considère la fonction h définie sur $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ par : $h(x) = f(x) - x$.
On a $h(0) = f(0) - 0 \geq 0$ et $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$ alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $h(x) = 0$ et par conséquent, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
2. On remarque que $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|\ \forall x \neq y$. Donc, la fonction g est 1-Lipschitzienne, ce qui implique que g est continue.
Par la question .1, g admet un point fixe, ensuite on suppose qu'elle en admette plus qu'un, soient x et y deux points fixes différents de g, on a :

$$|x - y| = |g(x) - g(y)| < |x - y|.$$

Contradiction, du coup g admet un et un seul point fixe.

Exercice 6.

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f possède un maximum et un minium.
2. Calculer
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x\left(\sin^8(x) + \cos^{14}(x)\right)}.$$

Solutions :

1.Comme la fonction f est périodique (on suppose que sa période est L), il suffit de montrer qu'elle possède un minimum et un maximum sur $[0, L]$ pour en déduire qu'elle un maximum et un minimum sur $\mathbf{R}$.

Pour cela, on considère la fonction h définie sur $[0, L]$ par $x \mapsto f(x)$. La fonction h est continue et définie sur un segment, donc par le théorème du maximum h atteint son maximum, noté M. Ensuite, comme $\max -h = -\min h$, en appliquant le théorème du maximum à $-h$ on trouve que le minimum m de h est aussi atteint. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $y := x - kL \in [0, L]$ (prendre $k = \lfloor x/L \rfloor$). On a alors $m \leq h(y) \leq M$, et puisque $f(x) = f(y) = h(y)$ (par L-périodicité) on en déduit que $m \leq f(x) \leq M$. Donc m (resp. M) est un minimum (resp. maximum) global de f sur $\mathbf{R}$.

2. Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $x :\mapsto \sin^8(x) + \cos^{14}(x)$, g est continue et périodique, par la question 1. elle possède donc un minimum m. Notons que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $\sin^8(x) \geq 0$ et $\cos^{14}(x) \geq 0$, en particulier $g(x) \geq 0$. De plus $g(x) = 0$ et seulement si $\sin(x) = 0$ et $\cos(x) = 0$, ce qui n'est pas possible car cela impliquerait $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 0$ (on sait que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$). Donc $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On en déduit que $m > 0$ (car le minimum est atteint).
Par conséquent, $g(x) \geq m > 0, \forall x \in \mathbf{R}$. D'où*

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x\left(\sin^8(x) + \cos^{14}(x)\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{xg(x)} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{xm} = 0.$$

Exercice 7. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue.

Solutions :

On rappelle que f est uniformément continue sur $I \subseteq \mathbf{R}$ si $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in I$, $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$. On prend la négation de cette proposition on a :
f n'est pas uniformément continue s'il $\exists\epsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists(x, y) \in \mathbf{R}$ on a : $|x-y| < \delta\epsilon$ et $|f(x)-f(y)| \geq \epsilon$.
Ici, $f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ et donc $|f(x) - f(y)| = |x - y||x + y|$.
Il faut donc touver des x, y tels que $|x + y|$ est très grand même si $|x - y| < \delta$ est très petit. On pose $\epsilon = 1$ et pour tout $\delta > 0$ on prend $x = \frac{\epsilon}{\delta}$ et $y = \frac{\epsilon}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ on a bien $|x - y| = \frac{\delta}{2} \leq \delta$ et $|f(x) - f(y)| = \frac{\delta}{2}(2\frac{\epsilon}{\delta} + \frac{\delta}{2}) = \epsilon + \frac{\delta^2}{4} > \epsilon$. D'où, f n'est pas uniformément continue.

Exercice 8. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues qui vérifient la condition

$$(*) \ : \qquad \forall(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x + y) = f(x)\, f(y)\,.$$

Soit f vérifiant $(*)$.

1. Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\forall(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Que peut-on dire de f ?
   On suppose désormais que f ne s'annule pas.
4. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = \alpha^n$.
5. Montrer que : $\forall k \in \mathbf{Z}$, $f(k) = \alpha^k$.
6. Montrer que : $\forall r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = \alpha^r$.
7. Conclure.

Solutions :
1. On procède par récurrence, soit $(P_n) : \forall(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$.
Initialisation : pour $n = 2$, d'après (*), $\forall(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
Hérédité : On suppose que (P_n) est vraie et on démontre que (P_{n+1}) est vraie :
Soit $(x_1, .., x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$, on :

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + ... + x_{n+1}) =& f((x_1 + x_2 + ... + x_n) + x_{n+1}) \\ &= f(x_1 + x_2 + ... + x_n) + f(x_{n+1}) \quad par(*) \\ &= f(x_1)f(x_2)...f(x_n)f(x_{n+1}) \quad par(P_n). \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \geq 2$, $\forall(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$. 2. D'après (*), on a $f(0 + 0) = f(0) = f(0)f(0) = f(0)^2$, $\implies f(0)\ \{0, 1\}$.
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$, soit $x \in \mathbf{R}$, d'après (*) on a : $f(x) = f(x-x_0+x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$ donc $f(x) = 0$, par conséquent f est nulle sur tout $\mathbf{R}$.
4. On prenant $x_1 = \cdots = x_n = 1$ on a $f(n) = f(1)^n$ on pose $\alpha = f(1)$, comme f ne s'annule pas on a $f(0) = 1$, par la contraposé du TVI $f(1) = \alpha > 0$.
5. On a $f(-1)f(1) = f(-1+1) = f(0) = 1$, $\implies f(-1) = f(1)^{-1} = \alpha^{-1}$, on prenant $x_1 = \cdots = x_k = -1$

on a : $f(-k) = f(-1)^k = \alpha^{-k}$ donc $\forall k \in \mathbf{Z}, f(k) = \alpha^k$.
6. Soient $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\alpha^p = f(p) = f(q(\frac{p}{q})) = f(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + ...\frac{p}{q}) = f(\frac{p}{q})^q, \implies f(\frac{p}{q}) = \alpha^{\frac{p}{q}}.$$

Donc, $\forall r \in \mathbf{Q},\ f(r) = \alpha^r$.
7. Soit $x \in \mathbf{R}$, par densité de $\mathbf{Q}$ on sait qu'il existe une suite $r_i \in \mathbf{Q}$ tel que $\lim\limits_{i\to+\infty} r_i = x$, on a alors $f(x) = \lim\limits_{i\to+\infty} f(r_i) = \lim\limits_{i\to+\infty} \alpha^{r_i} \lim\limits_{i\to+\infty} exp(r_i\alpha) = exp(x\alpha) = \alpha^x$.
Réciproquement, si $f(x) = \alpha^x, \forall x \in \mathbf{R}$ et $\alpha > 0$ f vérifie bien (*).

Exercice 9. Soit $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction continue telle que $f(x)/x$ a une limite réelle $\ell \in [0, 1[$ quand x tend vers ∞. Montrer que f a un point fixe.

Solutions :

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$, donc il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \geq a$, $\frac{f(x)}{x} \leq 1$, donc $\forall x \geq a, f(x) \leq x$.
On considère la fonction $g : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*, x \mapsto f(x) - x$, on a : $g(0) \geq 0$ car l'image de f est dans $[0, +\infty[$, ensuite, $g(a) \leq a$ car $f(A) \leq 0$. Par le TVI, il existe $c \in [0, A]$ tel que $g(c) = 0$ et donc $f(c) = c$.

Exercice 10. Soit f continue sur $\mathbf{R}_+$ telle que, pour tout réel positif x, on ait $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Solutions :

On démontre par récurrence que $f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}}), \forall n \in \mathbf{N}$.
Initialisation : pour $n = 1$ on a bien $f(x) = f(x^{\frac{1}{2^1}})$ (car $f(x) = f(x^2)$).
Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour $n \in \mathbf{N}$ et démontrons qu'elle l'est pour $n+1$, on a :

$$f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f((x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2^n}}) = f(x^{\frac{1}{2^{n+1}}}).$$

Conclusion : $f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}}), \forall n \in \mathbf{N}$.
Maintenant, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1, \forall x \in \mathbf{R}^{*,+}$, alors on a :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1).$$

Par la continuité de f, on a alors $f(x) = f(1), \forall x \neq 0$. Ensuite , par la continuité de f on a $f(0) = f(1)$. Enfin, f est constante sur $\mathbf{R}^+$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ continue et admettant une limite réelle quand x tend vers ∞. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}_+$.

Solutions :

Supposons que $\lim f(x) = l$, soit $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \geq A, |f(x) - l| \leq \frac{\epsilon}{3}$, comme f st uniformément continue sur $[0, A]$ par le théorème de Heine (car $[0, A]$ est compacte), alors pour ce ϵ, $\exists\delta$ tel que $|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}$.
Soient maintenant, $x, y \in \mathbf{R}$ tel que $|x, y| \leq \delta$, si $(x, y) \in [0, A]$ on a bien $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon/3 \leq \epsilon$, si

$x, y \geq A$ on a $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 \leq \epsilon$. Finalement, si $x \leq A$ et $y \geq A$ (ou le contraire), on a $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - l| + |l - f(y)| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \leq \epsilon$. Conclusion : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, par conséquent, f est uniformément continue.

Exercice 12. Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ continue et vérifiant $f(0) = f(1)$.

1. Soit n un entier naturel non nul et soit $a = 1/n$. Montrer que l'équation $f(x + a) = f(x)$ admet au moins une solution.
2. Montrer (en fournissant une fonction précise) que, si a est un réel de $]0, 1[$ qui n'est pas de la forme précédente, il est possible que l'équation $f(x + a) = f(x)$ n'ait pas de solution.

Solutions :
1. $\forall n \in \mathbf{N}$ on définit $h : [0, \frac{n-1}{n}] \to \mathbf{R}$ par : $x \mapsto f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$, on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(\frac{i}{n}) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x + \frac{1}{n}) - f(\frac{i}{n}) \right) = f(1) - f(0) = 0,$$

Donc il existe $i, j \in \{0, 1, ...n - 1\}$ différents tels que l'on a : $h(\frac{i}{n}) \leq 0$ et $h(\frac{j}{n}) \geq 0$ par suite, par le TVI il existe $c \in [\frac{i}{n}, \frac{j}{n}]$ (on suppose que $j > i$) tel que $h(c) = f(c + \frac{1}{n}) - f(c) = 0$.
2. Soit $a \in [0, 1]$ n'étant pas de la forme $\frac{1}{n}$ pour un certain n dans $\mathbf{N}$. Soit $g(x) = |sin(\frac{x\pi}{a})|$ on sait que $g(x + a) - g(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$.
Soit maintenant la fonction $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $x \mapsto g(x) - xg(1)$, on a :

$$P(x + a) - P(x) = g(x + a) - (x + a)g(1) - g(x) + xg(1) = -ag(1) \neq 0.$$

Pour P, il n'existe aucun $x \in [0, 1]$ tel que $P(x + a) - P(a) = 0$.
Voici un exemple avec $a = 0.3$ $\big(P(x) = |sin(\frac{x\pi}{a})| - x|sin(\frac{\pi}{a})|.\big)$.