Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2025–2026
Algèbre 1 et Analyse 1

Feuille d'exercices n° 7
NOMBRES COMPLEXES

---

1. Calculs, partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module

Exercice 1.

a) Calculer $i^n,\ n \in \mathbb{Z}$.
b) Calculer $(1+i)^8$.

Solutions :
a)
On a : $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i$ et $i^4 = 1$.
Donc on a 4 cas :

1. Si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k$, on a : $i^n = 1$.
2. Si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k+1$, on a : $i^n = i$.
3. Si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k+2$, on a : $i^n = -1$.
4. Si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k+3$, on a : $i^n = -i$.

b)
On a : $(1+i)^8 = ((1+i)^2)^4 = (2i)^4 = 16$.

Exercice 2.

a) Écrire le conjugué de $z = \dfrac{4-5i}{3+i}$, puis préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.
b) Soit z un complexe. Exprimer le conjugué de $w = \dfrac{2z^2-i}{5z+1}$ en fonction de $\bar{z}$.

Solutions :
a)
On écrit z sous forme algébrique :

$$z = \frac{4-5i}{3+i} = \frac{(4-5i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{12-5+i(-15-4)}{9+1} = \frac{7-19i}{10} = \frac{7}{10} - i\frac{19}{10}.$$

On en déduit que : $\overline{z} = \overline{\left(\frac{7}{10} - i\frac{19}{10}\right)} = \frac{7}{10} + i\frac{19}{10}$ et que : $Re(\overline{z}) = \frac{7}{10}$, $Im(\overline{z}) = \frac{19}{10}$.
b)
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{5}\}$, on a : $w = \frac{2z^2-i}{5z+1}$, alors :

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{2z^2-i}{5z+1}\right)} = \frac{\overline{2z^2-i}}{\overline{5z+1}} = \frac{2\overline{z^2}+i}{5\overline{z}+1} = \frac{2(\overline{z})^2+i}{5\overline{z}+1}.$$

Exercice 3.

a) Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, exprimer $1/z$ sous forme algébrique.

b) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et tout $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} ax - by = c, \\ bx + ay = d. \end{cases}$$

Solutions :
a) Rappel : pour $z \in \mathbb{C}$ on a $z\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$ et donc si $z \in \mathbb{C}^*$, $\bar{z} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2} - i\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}$. Autre point de vue : pour $z \in \mathbb{C}^*$,il exite un unique couple (i.e sa partie réelle et imaginaire) $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que : $z = a + ib$.
Donc :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

b)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(c, d) \in \mathbb{R}^2$. On sait que : $(a + ib)(x + iy) = ax - by + i(ay + bx)$, alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} ax - by = c \\ bx + ay = d \end{cases} &\Leftrightarrow (a+ib)(x+iy) = (c+id) \\ &\Leftrightarrow x + iy = \frac{c+id}{a+ib} = (c+id)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{ac+bd}{a^2+b^2} \\ y = \dfrac{ad-bc}{a^2+b^2} \end{cases} \end{aligned}$$

<u>**Exercice 4.**</u> On note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Soit P une fonction polynômiale à coefficients réels, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel n et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Soit z un nombre complexe. Montrer que si $P(z) = 0$, alors $P(\overline{z}) = 0$

b) Calculer $j\overline{j}$ et $j + \overline{j}$.

c) En déduire $j(-1 - j)$, puis constater que j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Quelle est l'autre solution ?

d) À la lumière des questions précédentes, résoudre l'équation $z^3 = 1$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

e) Sans calculer $1/j$ ni j^2, utiliser la question 4. pour justifier que $\overline{j} = \frac{1}{j} = j^2$.

Solutions :
a)
Soit P une fonction polynômiale à coefficients réels, si z est une racine de P alors on a par définition : $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$, d'où :

$$0 = \overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = P(\overline{z}).$$

Donc, $P(\overline{z}) = 0$ ($\overline{z}$ est une racine de la fonction P).
b)

On a : $j\overline{j} = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$
Et
$j + \overline{j} = 2Re(j) = -1.$
c)
D'après la question qui précède, $j(-1-j) = j(\overline{j}) = 1$ et donc, $j(-1-j) = -j - j^2 = 1$, qui équivaut : $j^2 + j + 1 = 0$, d'où j est une racine de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
Par la question 1. l'autre racine est $\overline{j}$.
d) On a cf. ex :15

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z \in \{1, j, \overline{j}\}.$$

e)
La question b. implique que $j = \frac{1}{\overline{j}}$.
De plus, j est une racine de $z^3 = 1$, donc $j^3 = 1$, d'où $j^2 = \frac{1}{j}$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{iz-1}{z-i}$ soit réel.

Solutions :
On sait qu'un nombre complexe w est réel si et seulement si $w = \overline{w}$, soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{iz-1}{z-i} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{iz-1}{z-i} = \overline{\left(\frac{iz-1}{z-i}\right)} \\
&\Leftrightarrow \frac{iz-1}{z-i} = \frac{-i\overline{z}-1}{\overline{z}+i}. \\
&\Leftrightarrow i|z|^2 - \overline{z} - z - i = -i|z|^2 - z - \overline{z} + i. \quad \text{(remarquer que :} z\overline{z} = |z|^2\text{)} \\
&\Leftrightarrow |z|^2 = 1.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\frac{iz-1}{z-i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$ et $z \neq i$.

Exercice 6. Résoudre $z^2 = \bar{z}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Solutions :
En utilisant le fait que $|\overline{z}| = |z|$ et que $|z^2| = |z|^2$, on a :
Pour $z \in \mathbb{C}, z^2 = \overline{z} \implies |z|^2 = |z| \implies |z| \in \{0, 1\}$.
Si $|z| = 0$ on a $z = 0$.
Si $|z| = 1$ on a $z^3 = z\overline{z} = |z|^2 = 1$ donc (d'après 4.d) $z \in \{1, j, \overline{j}\}$.
Conclusion : après vérification des solutions, $\{z \in \mathbb{C}, z^2 = \overline{z}\} = \{0, 1, j, \overline{j}\}$.

Exercice 7. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est réel.

Solutions :
On sait que, si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ on a : $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.
Donc,

$$\begin{aligned}
|z-i| = |z+i| &\Leftrightarrow |z-i|^2 = |z+i|^2 \\
&\Leftrightarrow (z-i)(\overline{z-i}) = (z+i)(\overline{z+i}) \\
&\Leftrightarrow (z-i)(\overline{z}+i) = (z+i)(\overline{z}-i) \\
&\Leftrightarrow z\overline{z} + iz - i\overline{z} + 1 = z\overline{z} - iz + i\overline{z} + 1 \\
&\Leftrightarrow iz - i\overline{z} = -iz + i\overline{z} \\
&\Leftrightarrow z = \overline{z} \\
&\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercice 8. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.

Solutions :
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z| = |z'| = 1$ et $zz' \neq -1$. on a

$$\begin{aligned} \frac{z+z'}{1+zz'} = \frac{(z+z')(1+\overline{z}\overline{z'})}{(1+zz')(1+\overline{z}\overline{z'})} &= \frac{z+z'+\overline{z'}+\overline{z}}{|1+zz'|^2} \quad (\text{car } z\overline{z} = z'\overline{z'} = 1). \\ &= \frac{2Re(z+z')}{|1+zz'|^2} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\left|\dfrac{z+z'}{1+zz'}\right| = \dfrac{2|Re(z+z')|}{|1+zz'|^2}$.

Exercice 9. Soient u, v et w trois nombres complexes tels que $|u| = |v| = |w| = 1$. Établir la relation :

$$|uv + vw + wu| = |u + v + w|.$$

Solutions :
On rappelle que, si $|u| = |v| = |w| = 1$ alors :

$$\overline{u} = \frac{1}{u},\ \overline{v} = \frac{1}{v} \text{ et } \overline{w} = \frac{1}{w}.$$

D'où

$$|u+v+w| = |\overline{u+v+w}| = |\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}| = \left|\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right| = |uvw|\left|\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right| = |uv+vw+wu|.$$

Car $|uvw| = |u||v||w| = 1$.

Exercice 10.

Soient u et v deux nombres complexes distincts tous deux de module 1.

1. Montrez que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z^2 \in]-\infty, 0] \Leftrightarrow z$ est imaginaire pure.
2. Montrer que pour tout complexe z, le nombre complexe $\left(\dfrac{z + uv\overline{z} - (u+v)}{u-v}\right)^2$ est un nombre réel négatif ou nul.

Solutions :

1. Si z est imaginaire pur, alors z s'écrit comme $z = ia, a \in \mathbb{R}$. On a clairement $z^2 = -a^2 \in]-\infty, 0]$. Inversement, supposons que $z^2 \in]-\infty, 0]$, on écrivant z sous forme algébrique (i.e. $z = a + bi$) cela se traduit en : $z^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ qui est dans $]-\infty, 0] \Leftrightarrow a = 0$.
2. Maintenant, il nous ne reste qu'à démontrer que $\left(\dfrac{z + uv\overline{z} - (u+v)}{u-v}\right)$ est imaginaire pur pour déduire que son carré est dans $]-\infty, 0]$. On rappelle que $|u| = |v| = 1 \implies \overline{u} = \dfrac{1}{u}$ et $\overline{v} = \dfrac{1}{v}$, alors :

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z + uv\overline{z} - (u+v)}{u-v}\right)} &= \frac{\bar{z} + \bar{u}\bar{v}z - (\bar{u}+\bar{v})}{\bar{u}-\bar{v}} \\ &= \frac{\bar{z} + \frac{1}{\bar{u}\bar{v}}z - (\frac{1}{\bar{u}} + \frac{1}{\bar{v}})}{\frac{1}{\bar{u}} - \frac{1}{\bar{v}}} \\ &= \frac{uv\overline{z} + z - (v+u)}{v-u} \\ &= -\left(\frac{z + uv\overline{z} - (u+v)}{u-v}\right). \end{aligned}$$

$$\overline{\left(\frac{z+uv\overline{z}-(u+v)}{u-v}\right)}+\left(\frac{z+uv\overline{z}-(u+v)}{u-v}\right)=0 \implies \left(\frac{z+uv\overline{z}-(u+v)}{u-v}\right) \text{imaginaire pur.}$$

Exercice 11.

a) Soit $P(X)=X^3+aX^2+bX+c$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour quelle valeur de $t\in\mathbb{C}$ le polynôme $P(X+t)$ est-il de la forme

$$X^3+3pX+q$$

avec $p,q\in\mathbb{C}$?
Soient $p,q\in\mathbb{C}$. On s'intéresse à une méthode de calcul des racines du polynôme $R=X^3+3pX+q$, dite *méthode de Cardan*. On note α et β les deux racines, éventuellement égales, du polynôme X^2+qX-p^3 et $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ les trois racines cubiques de α.

b) Exprimer $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de p et q.

c) Démontrer que $\gamma_k-\frac{p}{\gamma_k}$ est une racine de R pour tout $k\in\{1,2,3\}$.
On pose : $P=X^3+3X^2+6X+2$.

d) Appliquer à P le procédé de la question 1.

e) Déterminer les racines du polynôme R déduit de P, puis celles de P, en exploitant la méthode de Cardan de la question 2.

Solutions :
a)
Soit $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}P(x+t)=(X+t)^3+a(X+t)^2+b(X+t)+c&=(X^3+3X^2t+3Xt^2+t^3)+a(X^2+2Xt+t^2)+bX+bt+c\\&=X^3+X^2(3t+a)+X(3t^2+2at+b)+t^3+at^2+bt+c.\end{aligned}$$

Donc pour $t=-\dfrac{a}{3}$, on a : $P(X+t)=X^3+3pX+q$ avec :

$$p=t^2+\frac{2}{3}at+\frac{b}{3}=\frac{a^2}{9}-\frac{2}{9}a^2+\frac{b}{3}=-\frac{a^2}{9}+\frac{b}{3}.$$

et

$$q=t^3+at^2+bt+c=-\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{ab}{3}+c=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c.$$

b)
On suppose que le polynôme X^2+qX-p^3 a au moins une racine non nulle, on la note α, l'autre racine sera notée β. $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ sont les racines cubiques de α, (i.e. les solutions de l'équation $z^3=\alpha$).

On a $X^2+qX-p^3=(X-\alpha)(X-\beta)=X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\beta \implies \begin{cases}\alpha+\beta=-q\\ \alpha\beta=-p^3.\end{cases}$

c)
On a :

$$\begin{aligned}R(\gamma_k-\frac{p}{\gamma_k})=(\gamma_k-\frac{p}{\gamma_k})^3+3p(\gamma_k-\frac{p}{\gamma_k})+q&=\gamma_k^3-3\gamma_k^2\frac{p}{\gamma_k}+3\gamma_k(\frac{p}{\gamma_k})^2-(\frac{p}{\gamma_k})^3+3p\gamma_k-3\frac{p^2}{\gamma_k}+q\\&=\alpha-3p\gamma_k+3\frac{p^2}{\gamma_k}-\frac{p^3}{\alpha}+3p\gamma_k+3\frac{p^2}{\gamma_k}+q\\&=\alpha-\frac{p^3}{\alpha}+q=\frac{1}{\alpha}(\alpha^2+q\alpha-p^3)=0.\end{aligned}$$

Car α est une solution de $X^2 + qX - p^3 = 0$, d'où $\gamma_k + \frac{p}{\gamma_k}$ $(\forall k \in \{1,2,3\})$ est une racine de R.

d)
Ici, $a = 3, b = 6$ et $c = 2$. On a alors : $p = 1$ et $q = -2$ et donc $R(X) = X^3 + 3X - 2$.

c)
On cherche d'abord les racines de $X^2 + qX - p^3 = X^2 - 2X - 1$, après un calcul du discriminant, les deux racines sont : $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ et $\beta = 1 - \sqrt{2}$.
Les racines cubique de α sont : $\{\alpha^{\frac{1}{3}}, \alpha^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2i\pi}{3}}, \alpha^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2i\pi}{4}}\}$, les racines de R sont donc :

$$\left\{\alpha^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{3}}},\ \alpha^{\frac{1}{3}} exp\left(\frac{i2\pi}{3}\right) - \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{3}} exp\left(\frac{i2\pi}{3}\right)},\ \alpha^{\frac{1}{3}} exp\left(\frac{i4\pi}{3}\right) - \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{3}} exp\left(\frac{i4\pi}{3}\right)}\right\}.$$

Comme $P(X) = R(X+1)$, les racines de P sont :

$$\left\{\alpha^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{3}}} - 1,\ \alpha^{\frac{1}{3}} exp\left(\frac{i2\pi}{3}\right) - \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{3}} exp\left(\frac{i2\pi}{3}\right)} - 1,\ \alpha^{\frac{1}{3}} exp\left(\frac{i4\pi}{3}\right) - \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{3}} exp\left(\frac{i4\pi}{3}\right)} - 1\right\}.$$

2. Autour des racines carrées

Exercice 12. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $\Delta_1 = 49$ b) $\Delta_2 = -25$ c) $\Delta_3 = 50i$
d) $\Delta_4 = 3 + 4i$ e) $\Delta_5 = 8 - 6i$

Solutions :

Rappel : $w \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de $z \in \mathbb{C}$ si $w^2 = z$. Fait : Tout nombre complexe admet exactement 2 racines carrées, sauf 0 (remarquez que si $w \in \mathbb{C}$ satisfait $w^2 = z$ alors $(-w)^2 = z$.

a) $\Delta_1 = 49 \implies \{z \in \mathbb{C}, z^2 = \Delta_1\} = \{7, -7\}$.

b) $\Delta_2 = -25 \implies \{z \in \mathbb{C}, z^2 = \Delta_2\} = \{5i, -5i\}$.

c) $\Delta_3 = 50i$
On cherche $a + ib \in \mathbb{C}$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que : $(a+bi)^2 = 50i$,

$$\begin{aligned}(a+bi)^2 = 50i \implies a^2 - b^2 + 2abi = 50i &\implies a^2 = b^2 \text{ et } ab = 25\\ &\implies |a| = |b| \text{ et } ab = 25\\ &\implies (a,b) = (5,5) \text{ ou } (a;b) = (-5,-5).\end{aligned}$$

On peut vérifier que $\pm(5 + i5)$ sont bien les racines carrés de $50i$.

d) $\Delta_3 = 3 + 4i$.
On cherche (a,b) tel que : $(a+bi)^2 = 3 + 4i$,

$$\begin{aligned}(a+bi)^2 = 3+4i &\implies a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i\\ &\implies a^2 - b^2 = 3 \text{ et } ab = 2\\ &\implies a^2 - b^2 = 3 \text{ et } a^2b^2 = 4\\ &\implies b \in \{1,-1\} \text{ et } a \in \{2,-2\}.\end{aligned}$$

On vérifie que les deux racines sont : $\pm(2+i)$.

e) $\Delta_5 = 8 - 6i$
On cherche (a, b) tel que : $(a + bi)^2 = 8 - 6i$,

$$\begin{aligned}
(a+bi)^2 = 8-6i \implies & \; a^2 - b^2 + 2abi = 8 - 6i \\
\implies & \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \\ |a+ib|^2 = |8+i6|. \end{cases} \\
\implies & \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ ab = -3 \\ a^2 + b^2 = 10. \end{cases} \\
\implies & \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \\ ab > 0 \end{cases} \\
\implies & \; (a, b) \in \{(3, -1), (-3, 1)\}.
\end{aligned}$$

On vérifie que $-3 + i$ et $3 - i$ sont les racines carrées de $8 - 6i$.

Exercice 13. Résoudre les équations du second degré suivantes :

a) $z^2 + 2z + 10 = 0$ b) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ c) $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$.

Solutions :

Fait : On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0, a \neq 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.
Soient x_1 et x_2 les deux racines carrées de $\Delta = b^2 - 4ac$, alors les solutions de cette équation sont : $\dfrac{-b + x_1}{2a}$ et $\dfrac{-b + x_2}{2a}$. (remarquer que $x_1 = -x_2$).

a) $z^2 + 2z + 10 = 0$,
$\Delta = 2^2 - 4(1)(10) = -36 = (i6)^2$.

$$z_1 = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i \quad z_2 = \frac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i.$$

b) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$,

$$\Delta = (-2i)^2 - 4(1)(-1 + 2i) = 8i = -4(i + 1)^2 = (2i(1 + i)^2)^2 = (2(i - 1))^2.$$

Les deux racines sont :

$$z_1 = \frac{-2i + 2(i - 1)}{2} = 2i - 1 \quad z_2 = \frac{-2i - 2(i - 1)}{2} = 1$$

c) $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$,
$\Delta = (4i - 3)^2 - 4(i)(i - 5) = 3 - 4i = (2i - 1)^2$. d'après ex :12.d

Alors,

$$z_1 = \frac{-(4i + 3) + (2i - 1)}{2i} = \quad z_2 = \frac{-(4i + 3) - (2i - 1)}{2i} = .$$

Exercice 14. Résoudre l'équation suivante

$$z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0 \quad (*).$$

Solutions :

$$\begin{aligned}
z=a+bi \text{ est une solution de } (*) &\Leftrightarrow (a+bi)^2-2\overline{(a+bi)}+1=0\\
&\Leftrightarrow (a+bi)^2-2(a-bi)+1=0\\
&\Leftrightarrow a^2-b^2-2a+1=0 \text{ et } 2ab+2b=0\\
&\Leftrightarrow a^2-b^2-2a+1=0 \text{ et } b(a+1)=0\\
&\Leftrightarrow (b=0 \text{ et } a^2-b^2-2a+1=0) \text{ ou } (a=-1 \text{ et } a^2-b^2-2a+1=0).\\
&\Leftrightarrow (b=0 \text{ et } a^2-2a+1=0) \text{ ou } (a=-1 \text{ et } -b^2+4=0).\\
&\Leftrightarrow (b=0 \text{ et } (a-1)^2=0) \text{ ou } (a=-1 \text{ et } b^2=4).\\
&\Leftrightarrow (b=0 \text{ et } a=1) \text{ ou } (a=-1 \text{ et } (b=2 \text{ ou } b=-2)).\\
&\Leftrightarrow (a,b)\in\{(1,0),(-1,2),(-1,-2)\}.
\end{aligned}$$

Exercice 15. On considère l'équation en $z\in\mathbb{C}$ suivante : $z^3+(1-3i)z^2-(6-i)z+10i=0$.

a) Déterminer une racine réelle z_0 de cette équation.

b) Pour $z\in\mathbb{C}$, factoriser $z^3+(1-3i)z^2-(6-i)z+10i$ par $(z-z_0)$.

c) Résoudre l'équation.

Solutions :

Fait : Soit P un polynôme de dégré n à coefficients réels ou complexes, soit α une racine du polynôme P, (i.e. $P(\alpha)=0$). Alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que l'on a : $P(z)=(z-\alpha)Q(z)\ \forall z\in\mathbb{C}$.

Exemple : le polynôme z^3-1 admet 1 pour racine, alors il existe Q de degré 2 tel que $z^3-1=(z-1)Q(z)\ \forall z\in\mathbb{C}$, comment trouver Q ?, on écrit $Q=az^2+bz+c$ et on résout l'équation : $z^3-1=(z-1)(az^2+bz+c)\ \forall z\in\mathbb{C}$ d'inconnus a,b,c dans $\mathbb{C}$. ce qui revient à résoudre $z^3-1=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c$, on sait que deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients le sont, ce qui implique que : $a=b=c=1$.
et donc :

$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1).$$

1. Soit z_0 une solution réelle de l'équation, alors on a :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} Re(z_0^3+(1-3i)z_0^2-(6-i)z_0+10i)=Re(0)=0\\ Im(z_0^3+(1-3i)z_0^2-(6-i)z_0+10i)=Im(0)=0.\end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} z_0^3+z_0^2-6z_0=0\\ -3z_0^2+z_0+10=0.\end{cases}\\
&\Longrightarrow \begin{cases} z_0(z_0^2+z_0-6)=0\\ -3z_0^2+z_0+10=0.\end{cases}\\
&\Longrightarrow \begin{cases} z_0\in\{0,2,-3\}\\ -3z_0^2+z_0+10=0.\end{cases}\\
&\Longrightarrow z_0=2.
\end{aligned}$$

2. D'après le "fait", il existe un polynôme Q de degré 2, tel que $z^3+(1-3i)z^2-(6-i)z+10i=$

$(z-2)Q(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$, si on pose $Q = az^2 + bz + c$ on aura :

$$\begin{aligned}
& z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = (z-2)Q(z) \\
& \Leftrightarrow z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = (z-2)(az^2 + bz + c) \\
& \Leftrightarrow z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c \\
& \Leftrightarrow z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 1 - 3i \\ c - 2b = -6 + i \\ -2c = 10i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - 3i \\ c - 2b = -6 + i \\ c = -5i \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - 3i \\ c = -5i \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, $z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = (z-2)(z^2 + (3-3i)z - 5i)$.

3. On s'est ramené à résoudre : $z^2 + (3-3i)z - 5i = 0$.
On a : $\Delta = (3-3i)^2 - 4(-5i) = 2i = (1+i)^2$, donc les solutions sont : $-1+2i$ et$-2+i$. Enfin,

$$\{z \in \mathbb{C}, z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = 0\} = \{2, -1+2i, -2+i\}.$$

3. Forme trigonométrique, argument

Exercice 16. Écrire sous forme trigonométrique les nombres suivants :

a) i b) $1+i$ c) $1-i$

d) $\sqrt{3}+i$ e) -1 f) 1

Solutions :
En pratique, pour écrire un nombre complexe $z = a + bi$ sous forme trigonométrique (i.e. $z = re^{i\theta}$), on l'écrit d'abord sous la forme $z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$ et puis on résout le système suivant :

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

d'inconnus r et θ, on remarque que θ est unique modulo 2π (ce qui est dû à la périodicité des fonctions *cos* et *sin*).

a)
$i = 0 + i = (1)\left(\frac{0}{1} + \frac{1}{1}i\right) = cos(\frac{\pi}{2}) + sin(\frac{\pi}{2})i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
b)
$1 + i = (\sqrt{1^2+1^2})\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{4}) + sin(\frac{\pi}{4})i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
c)
$1 - i = (\sqrt{1^2+(-1)^2})\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}(cos(-\frac{\pi}{4}) + sin(-\frac{\pi}{4})i)$
$= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

d)
$\sqrt{3} + i = \left(\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}}i\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2(cos(\frac{\pi}{6}) + sin(\frac{\pi}{6})i) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
e)
$-1 = -1 + 0i = e^{i\pi}$.
d)
$1 = 1 + 0i = e^{i0}$.

Exercice 17.

a) Calculer le module et un argument de $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

b) Écrire sous forme trigonométrique $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

Solutions :
a) On a :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}} = \frac{cos(\frac{\pi}{3}) + sin(\frac{\pi}{3})i}{cos(\frac{\pi}{6}) + sin(\frac{\pi}{6})i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

On en déduit que : $\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right| = 1 \quad \arg(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \; \forall k \in \mathbb{Z}$.

b) D'un coté on a : $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
de l'autre coté : $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
En combinant les deux égalités,

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4 = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^4 = 4e^{\frac{i7\pi}{3}} = 4e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Exercice 18. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $z = e^{i\theta}$. Déterminer la forme trigonométrique de $1+z$, puis de $1+z+z^2$.

Solutions :
a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$, on a :

$$1 + z = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta}{2}}(2cos(\frac{\theta}{2})).$$

Donc, si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta - 2k\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alors $cos(\frac{\theta}{2}) \geq 0$ donc $(2cos(\frac{\theta}{2}))e^{i\frac{\theta}{2}}$ est la forme polaire de $1 + z$.
sinon, $-2cos(\frac{\theta}{2}) \leq 0$ et $(-2cos(\frac{\theta}{2}))e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$ est la forme polaire de $1 + z$.

b) $1 + z + z^2 = 1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} = e^{i\theta}(e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta}) = e^{-i\theta}(2cos(\theta) + 1)$.
Si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta - 2k\pi \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$, on a $2cos(\theta) + 1 \leq 0$ et $(-2cos(\theta) - 1)e^{i(\theta+\pi)}$ est la forme polaire de $1 + z + z^2$.
Sinon, $2cos(\theta) + 1 \geq 0$ et $(2cos(\theta) + 1)e^{i\theta}$. est la forme polaire de $1 + z + z^2$.

Exercice 19. Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que

a) $(1 + i)^n \in \mathbb{R}$

b) $(\sqrt{3} + i)^n \in i\mathbb{R}$

Solutions :
a)
$(1 + i)^n = \left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}(e^{i\frac{\pi}{4}})^n = 2^{\frac{n}{2}}(e^{i\frac{n\pi}{4}}) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n = 4k, k \in \mathbb{N}$.
b)
$(\sqrt{3} + i)^n = \left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)^n = 2^n(e^{i\frac{\pi}{6}})^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow n = 6k + 3, k \in \mathbb{N}$.

Exercice 20.

a) Soient $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Démontrer l'identité

$$e^{i\theta} = \frac{1 + it}{1 - it},$$

puis exprimer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de t.

b) En déduire, pour tout $x \in \mathbf{R}$, une simpification de $\cos(2\arctan(x))$ et $\sin(2\arctan(x))$.

c) Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$\arg(z) \equiv 2\mathrm{arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) + |z|}\right) \pmod{2\pi}$$

Solution :
1. Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$ et $t = tan(\theta/2)$. On a :

$$e^{i\theta} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{cos(\frac{\theta}{2}) + isin(\frac{\theta}{2})}{cos(-\frac{\theta}{2}) + isin(-\frac{\theta}{2})} = \frac{cos(\frac{\theta}{2}) + isin(\frac{\theta}{2})}{cos(\frac{\theta}{2}) - isin(\frac{\theta}{2})} = \frac{1 + i\tan(\frac{\theta}{2})}{1 - i\tan(\frac{\theta}{2})} = \frac{1+it}{1-it}.$$

Car $\cos(\frac{\theta}{2}) \neq 0$ sur $]-\pi,\pi[$.
D'autre part, on a

$$\frac{1+it}{1-it} = \frac{(1+it)^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}.$$

Par conséquent, $cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $\theta = 2arctan(x) \in]-\pi,\pi[$.(on a donc $tan(\theta/2) = x$)

Alors, $cos(2arctan(x)) = cos(\theta) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ et $sin(2arctan(x)) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

3.Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, alors $\exists (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times]-\pi,\pi[$ tel que $z = re^{i\theta}$.
D'après 2., on a :

$$\begin{aligned} cos(2acrtan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)+|z|}\right)) &= \frac{1 - \left(\frac{Im(z)}{Re(z)+|z|}\right)^2}{1 + \left(\frac{Im(z)}{Re(z)+|z|}\right)^2} \\ &= \frac{Re(z)^2 + |z|^2 + 2Re(z)|z| - Im(z)^2}{Re(z)^2 + |z|^2 + 2Re(z)|z| + Im(z)^2} \\ &= \frac{2Re(z)^2 + 2Re(z)|z|}{2|z|^2 + 2Re(z)|z|} = \frac{Re(z)}{|z|} = cos(\theta). \end{aligned}$$

Le même travail montre que $sin(2acrtan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)+|z|}\right)) = sin(\theta)$. En en déduit que :

$$\theta \equiv 2acrtan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)+|z|}\right) [2\pi].$$

4. Racines de l'unité

Exercice 21. Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^3 = -8i$
b) $z^5 - z = 0$
c) $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$
d) $z^2\bar{z}^7 = 1$
e) $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$
f) $z^8 = z + \bar{z}$

Solutions :

Rappel : $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$

a) D'abord on remarque que si α est une solution de $z^3 = -8i$, alors $j\alpha$ et $\bar{j}\alpha$ le sont aussi, où :

$$\mathbb{U}_3 = \{z \in \mathbb{C}, z^3 = 1\} = \{1, j, \bar{j}\}.$$

donc il suffit juste de trouver une racine pour en déduire les deux autres.
On a : $-8i = 2^3(-i) = 2^3 e^{-i\frac{\pi}{2}} \implies z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ est une solution.
On déduit que :

$$\{z \in \mathbb{C}, z^3 = -8i\} = \{2e^{-i\frac{\pi}{6}}, j2e^{-i\frac{\pi}{6}}, \bar{j}2e^{-i\frac{\pi}{6}}\} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\mathbb{U}_3.$$

b) On a :

$$\begin{aligned} z^5 - z = 0 \Leftrightarrow z(z^4-1) = 0 &\Leftrightarrow z(z^2-1)(z^2+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in \{0, 1, -1, +i, -i\} \Leftrightarrow z \in \{0 \cup \mathbb{U}_4\}. \end{aligned}$$

c) On vérifie facilement que 1 n'est pas une solution, alors on peut supposer que $z \neq 1$, on a :

$$27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = (i\sqrt{3})^6. \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} \in i\sqrt{3}\mathbb{U}_6$$

Or, pour $w \neq 0$, on a : $\frac{z+1}{z-1} = w \Leftrightarrow (z+1) = w(z-1) \Leftrightarrow z(w-1) = (w+1) \Leftrightarrow z = \frac{w+1}{w-1}$.
Donc, z est une solution $\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} \in i\sqrt{3}\mathbb{U}_6 \Leftrightarrow z = \frac{w+1}{w-1}$ avec $w \in i\sqrt{3}\mathbb{U}_6$.

d) Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution à l'équation $z^2\overline{z}^7 = 1$. On a $1 = |z^2\overline{z}^7| = |z||\overline{z}^7| = |z|^2|\overline{z}|^7 = |z|^9 \implies |z| = 1$.
En écrivant z sous forme trigonométrique (i.e. $z = e^{i\theta}$), l'équation devient : $(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta})^7 = e^{-5i\theta} = 1$.
$z \in \mathbb{C}$ est une solution $\Leftrightarrow z = e^{i\theta}$ et $\theta \in \{\frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\}(z \in \mathbb{U}_5)$.

e) On commence par résoudre l'équation $X^2 - (3+2i)X + 2 + 2i = 0$,
on a : $\Delta = (3+2i)^2 - 4(2+2i) = (1+2i)^2$ donc les solutions sont :

$$z_1 = \frac{3+2i+(1+2i)}{2} = 2+2i \quad z_2 = \frac{3+2i-(1+2i)}{2} = 1$$

On sait que $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0 \Leftrightarrow z^3$ est une solution de $X^2 - (3+2i)X + 2 + 2i = 0$ et comme $2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}} = (8^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}})^3$, alors :

$$\{z \in \mathbb{C}, z^6 - (3i+2)z^3 + 2 + 2i = 0\} \Leftrightarrow z \in \{\mathbb{U}_3 \cup 8^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}\mathbb{U}_3\}.$$

f) $z^8 = z + \overline{z}$.
On écrit $z = re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}_+, \theta \in [0, 2\pi[$.
z est solution de $z^8 = z + \overline{z} \Leftrightarrow r^8(e^{i8\theta}) = 2r\cos(\theta)$.
Si $r = 0$ on a $z = 0$ est une solution, sinon on a :
z solution $\Rightarrow \begin{cases} r^7 cos(8\theta) = 2\cos(\theta) \\ r^7 sin(8\theta) = 0. \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} r^7\cos(2\theta) = 2\cos(\theta) \\ sin(8\theta) = 0. \end{cases}$ Car $r \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} r^7\cos(8\theta) = 2\cos(\theta) \\ \theta \in \{\frac{k\pi}{8}, 0 \leq k \leq 15\}. \end{cases}$ Car $\theta \in [0, 2\pi[$
Si $cos(\theta) = 0$ on a forcément $r = 0$, donc $\cos(\theta) \neq 0$ et donc :
z solution $\Rightarrow \begin{cases} r^7\cos(8\theta) = 2\cos(\theta) \\ \theta \in \{\frac{k\pi}{8}, 0 \leq k \leq 15, k \neq 4, k \neq 12\}. \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} r^7 = 2\cos(\frac{k\pi}{8}) \quad k \in \{0, 2, 6, 8, 10, 14\} \text{ et } \cos(\theta) > 0 \\ r^7 = -2\cos(\frac{k\pi}{8}) \quad k \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \} \text{ et } \cos(\theta) < 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} r = (2\cos(\frac{k\pi}{8}))^{\frac{1}{7}} \quad k \in \{2, 14\} \\ r = (-2\cos(\frac{k\pi}{8}))^{\frac{1}{7}} \quad k \in \{5, 7, 9, 11\}. \end{cases}$
Après vérification, les solutions de $z^8 = z + \overline{z}$ sont :

$$\{0\} \cup \left\{(2\cos(\frac{k\pi}{8}))^{\frac{1}{7}}e^{i\frac{k\pi}{8}}, k \in \{2, 12\}\right\} \cup \left\{(-2\cos(\frac{k\pi}{8}))^{\frac{1}{7}}e^{i\frac{k\pi}{8}}, k \in \{5, 7, 9, 11\}\right\}.$$

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer la somme des racines n-ièmes de l'unité.

b) Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

c) On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.

(*Indication : on pourra commencer par calculer* $\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k$ *pour tout* $j \in \{0, \ldots, n-1\}$)

Solutions :

a)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

Si $n = 1$,

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{z\in\mathbb{U}_1} z = 1,$$

sinon

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \frac{(e^{i\frac{2\pi}{n}})^n - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{i2\pi} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} = 0.$$

b)

$$\prod_{z\in\mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{2k\pi}{n}\right) = exp(i\pi(n-1)) = (-1)^{n-1}.$$

c)

D'abord, pour $j = 0$ ou $j = n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n,$$

Ensuite, pour $j \in \{2, 3, .., n-1\}$ et (en supposant $n \geq 3$), on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{2\pi j}{n}}\right)^k = \frac{(e^{i\frac{2\pi j}{n}})^n - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} = 0.$$

Et donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(\omega^k)^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^k)^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k}_{=0 \text{ si } j\neq 0,n}$$
$$= \binom{n}{0}n + \binom{n}{n}n = 2n.$$

<u>Exercice 23.</u> Soit z un nombre complexe. Prouver les identités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{18}\left(z - e^{2ik\pi/19}\right)^2 = 19z^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{18}\left|z - e^{2ik\pi/19}\right|^2 = 19(1+|z|^2).$$

Solution :

1. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{18}(z-e^{\frac{2ik\pi}{19}})^2 &= \sum_{k=0}^{18}(z^2-2ze^{\frac{2ik\pi}{19}}+e^{\frac{4ik\pi}{19}}) \\
&= \sum_{k=0}^{18} z^2 - 2z\sum_{k=0}^{18} e^{\frac{2ik\pi}{19}} + e^{\frac{4ik\pi}{19}} \\
&= 19z^2 - 2z\frac{e^{i2\pi}-1}{e^{\frac{2ik\pi}{19}}-1} + \frac{e^{i4\pi}-1}{e^{\frac{4ik\pi}{19}}-1} \\
&= 19z^2.
\end{aligned}$$

Car $e^{\frac{2ik\pi}{19}} \neq 1$ et $e^{\frac{4ik\pi}{19}} \neq 1$.

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{18}\left|z-e^{\frac{2ik\pi}{19}}\right|^2 &= \sum_{k=0}^{18}|z|^2 - z\sum_{k=0}^{18}e^{\frac{-2ik\pi}{19}} - \overline{z}\sum_{k=0}^{18}e^{\frac{2ik\pi}{19}} + \sum_{k=0}^{18}1 \\
&= 19|z|^2 - z\frac{e^{-i2\pi}-1}{e^{\frac{2ik\pi}{19}}-1} - \overline{z}\frac{e^{i2\pi}-1}{e^{\frac{-2ik\pi}{19}}-1} + 19 \\
&= 19|z|^2 + 19 = 19(|z|^2+1).
\end{aligned}$$

5. Angles remarquables

Exercice 24. On note $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1+i$ puis l'on définit $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

a) Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.

b) En déduire des expressions de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Solutions :
a)
On a $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$
De plus, $z_2 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
Alors, $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{12}}$.
b)
D'après 1. on a : $cos(-\frac{\pi}{12}) = Re(z_3)$ et $sin(-\frac{\pi}{12}) = Im(z_3)$. En calculant z_3,

$$z_3 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2(1+i)} = \frac{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(1-i)}{2(1+1)} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right).$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \\
\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 25.

a) Résoudre algébriquement en $z \in \mathbb{C}$ l'équation $z^2 = (1+i)$.

b) En déduire des expressions de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Solutions :

a)

Le polynôme $z \to z^2 - (i+1)$ est de degré 2, donc l'équation $z^2 - (i+1) = 0$ admet au plus 2 solutions,

$$z = a + bi \text{ vérifie } z^2 = i+1 \Rightarrow (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = i+1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ a^2 + b^2 = |a+bi|^2 = |i+1| = \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ ab > 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \text{sont les solutions de l'équation.}$$

b)

D'autre part, on sait que : $i+1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \;\Rightarrow\; \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $-\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ sont les solutions de l'équation.
On obtient :

$$\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\sqrt{2}}cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ \sqrt{\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \\ sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}. \end{cases}.$$

<u>Exercice 26.</u> On note $\omega = e^{2i\pi/5}$.

a) Quelle relation simple lie les nombres $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\omega + \frac{1}{\omega}$?

b) Justifier l'identité $\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) - 1 = 0$.

c) Calculer $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Solution :

a) On a

$$\omega + \frac{1}{\omega} = \omega + \overline{\omega} = 2\mathrm{Re}(\omega) = 2cos(\frac{2\pi}{5}).$$

b) On a :

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 + \omega + \frac{1}{\omega} - 1 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 2 + \frac{1}{\omega^2} + \omega + \frac{1}{\omega} - 1 \Leftrightarrow \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} = 0 \Leftrightarrow \omega^5 = 1.$$

c) D'après les questions précédentes, $2cos(\frac{2\pi}{5})$ est solution de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$, comme les solutions de cette équation sont : $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (≥ 0) et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (≤ 0), alors

$$cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

6. D'autres applications à la trigonométrie

Exercice 27. *Réduction de* $a\cos x + b\sin x$.

a) Soient a et b deux réels. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\theta).$$

b) Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $\cos x + \sin x = 1$.

Solutions :
a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$acos(x) + bsin(x) = Re(ae^{ix} - ibe^{ix}) = Re(e^{ix}(a-ib)) = rRe(e^{ix}e^{-i\theta}) = rRe(e^{i(x-\theta)}) = rcos(x-\theta).$$

Où $a - ib = re^{-i\theta},\ r \geq 0$.
b)
Ici $r = |1-i| = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$, on a donc :

$$\begin{aligned} cos(x) + sin(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}.$$

Exercice 28. Développer $\cos(2\varphi)$ pour obtenir un polynôme en $\cos(\varphi)$, puis $\sin(3\varphi)$ pour obtenir un polynôme en $\sin(\varphi)$.
Solutions :

On a pour $x \in \mathbb{R}$.

$$cos(2x) = Re(e^{i2x}) = Re((e^{ix})^2) = Re((cos(x) + isin(x)^2) = cos(x)^2 - sin(x)^2 = 2cos(x)^2 - 1$$

Donc $cos(2x) = P(cos(x))$ où $P(x) = 2x^2 - 1$.
De même :

$$\begin{aligned} sin(3x) = Im(e^{i3x}) = Im((e^{ix})^3) &= Im\left(cos(x)^3 + i3cos(x)^2sin(x) - 3cos(x)sin(x)^2 - isin(x)^3\right) \\ &= 3cos(x)^2sin(x) - sin(x)^3 = 3sin(x) - 4sin(x)^3. \end{aligned}$$

Ainsi, $sin(3x) = Q(sin(x))$ où $Q(x) = 3x - 4x^3$.

Exercice 29. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Solutions :
On remaque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \left(\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)\right) + i\left(\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)\right)$$

Pour $\theta = 2k\pi$ pour un certain k dans $\mathbb{Z}$, on a $e^{i\theta} = 1$ alors $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = n+1$ ce qui implique que $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = n+1$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = 0$.

Sinon,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i\theta(n+1)} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\theta\frac{n+1}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}}} \frac{e^{i\theta\frac{n+1}{2}} - e^{-i\theta\frac{n+1}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{-i\theta}{2}}} = e^{i\theta\frac{n}{2}} \frac{(2i)sin(\theta\frac{n+1}{2})}{(2i)sin(\frac{\theta}{2})} = e^{i\theta\frac{n}{2}} \frac{sin(\theta\frac{n+1}{2})}{sin(\frac{\theta}{2})}.$$

Ce qui donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{cos(\theta\frac{n}{2})sin(\theta\frac{n+1}{2})}{sin(\frac{\theta}{2})}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{sin(\theta\frac{n}{2})sin(\theta\frac{n+1}{2})}{sin(\frac{\theta}{2})}$.

7. Polygones

Exercice 30. Soient u et v deux nombres complexes. Établir l'identité suivante, dite « du parallélogramme » :

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

Pourquoi ce nom ?

Solution : Soient u et v deux nombres complexes, on a :

$$\begin{aligned} |u+v|^2 + |u-v|^2 &= (u+v)(\bar{u}+\bar{v}) + (u-v)(\bar{u}-\bar{v}) \\ &= u\bar{u} + u\bar{v} + v\bar{u} + v\bar{v} + u\bar{u} - u\bar{v} - v\bar{u} + v\bar{v}. \\ &= 2(u\bar{u} + v\bar{v}) = 2(|u|^2 + |v|^2). \end{aligned}$$

On l'appelle l'inégalité du parallélogramme, car elle lie les longueurs des cotés du parallélogramme à celles des diagonales.

Exercice 31. Soient a, b, c et d quatre nombres complexes distincts qui vérifient les deux relations :

$$a + c = b + d \qquad \text{et} \qquad a + ib = c + id.$$

Que peut-on dire du quadrilatère formé des quatres points ayant ces nombres complexes pour affixes ?

Solution :
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tel que : $\begin{cases} a+c = b+d \\ a+ib = c+id. \end{cases}$
On a : $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{d+b}{2} \implies$ les milieux des diagonales du polygone $(abcd)$ coincident.
Ensuite, $a - c = i(d-c) \implies$ les diagonales sont perpendiculaires. (En effet : $z \to iz$ correspond à la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$). Conclusion : le polygone $(abcd)$ est un carré.

Exercice 32. Soient a, b et c trois nombres complexes qui sont affixes de trois points formant dans le plan un triangle équilatéral. Montrer que :

$$\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^3 = -1.$$

Solution : $a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que (abc) est un triangle équilatéral.

On a : $|a-c| = |b-c|$ et $\arg\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Comme $(e^{-i\frac{\pi}{3}})^3 = (e^{i\frac{\pi}{3}})^3 = e^{\pm i\pi} = -1$, on a :

$$\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^3 = -1.$$

Exercice 33. Soit θ un nombre réel, avec $0 \leq \theta \leq \pi$.

a) Déterminer l'ensemble des solutions complexes de l'équation : $z^6 - 2z^3\cos\theta + 1 = 0$.
b) Pour quelles valeurs de θ ces solutions sont-elles les affixes des sommets d'un hexagone régulier ?

Solution :
a) On commence par déterminer les solutions de l'équation : $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1 = 0$.

On a $\Delta = (-2cos(\theta))^2 - 4 = 4(cos^2(\theta) - 1) = (2isin(\theta))^2$. donc, les solutions de cette équation sont :

$$s_1 = \frac{2cos(\theta) + 2isin(\theta)}{2} = e^{i\theta} \quad s_2 = \frac{2cos(\theta) - 2isin(\theta)}{2} = e^{-i\theta}.$$

Par conséquent, comme z est solution de $X^6 - 2X^3\cos(\theta) + 1 = 0$ si et seulement si z^3 est solution de $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1 = 0$, on a :

$$\{z \in \mathbb{C}, z^6 - 2z^3\cos(\theta) + 1 = 0\} = e^{i\theta}\mathbb{U}_3 \cup e^{-i\theta}\mathbb{U}_3.$$

b) On sait que $e^{i\theta}\mathbb{U}_3$ et $e^{-i\theta}\mathbb{U}_3$, sont deux triangles équilatéraux, inscrits dans le cercle de centre 0 et de rayon 1, leurs sommets forment un hexagone régulier si seulement si l'un des sommets d'un des triangles est antipodal à un sommet de l'autre triangle.
Pour cela, il faut et il suffit que $e^{i\theta}$ soit antipodal à l'un des sommets du triangle $e^{-i\theta}\mathbb{U}_3$, donc on se ramène à trouver les valeurs de θ qui satisfont :

$$\theta \equiv -\theta[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\theta + \frac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\theta + \frac{4\pi}{3}[2\pi].$$

Donc, les affixes des solutions forment un hexagone régulier si et seulement si : $\theta \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

8. Transformations affines

Exercice 34. Rappeler l'expression en terme de nombres complexes des transformations suivantes :

a) La translation de vecteur $v \in \mathbb{C}$.
b) L'homothétie de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
c) La rotation de centre $a \in \mathbb{C}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$.
d) La symétrie par rapport à un axe passant par $a \in \mathbb{C}$ et faisant un angle $\theta \in \mathbb{R}$ avec l'axe réel.

Solutions :

a) La translation de vecteur $v \in \mathbb{C}$: $z \mapsto z + v$.

b) L'homothétie de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $z \mapsto \lambda(z-a) + a$.

c) La rotation de centre $a \in \mathbb{C}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$: $z \mapsto e^{i\theta}(z-a)+a$.

d) La symétrie par rapport à un axe passant par $a \in \mathbb{C}$ et faisant un angle $\theta \in \mathbb{R}$ avec l'axe réel : $z \mapsto e^{i2\theta}\overline{(z-a)}+a$.

<u>Exercice 35.</u> On rappelle l'identification canonique entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ via l'application affixe et sa réciproque :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & x+iy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ z & \mapsto & (\text{Re z}, \text{Im z}) \end{array}.$$

1. Identifier les transformations du plan ayant l'écriture complexe suivante :

   a) $f_1(z) = z+3-2i$, b) $f_2(z) = e^{i2\pi/7}z$, c) $f_3(z) = e^{i2\pi/3}z-1$,
   d) $f_4(z) = 3z-5+i$, e) $f_5(z) = (2+2i)z+3i$.

2. Donner l'écriture complexe des transformations du plan suivantes :
   a) La translation du vecteur d'affixe $-2+i$;
   b) La symétrie centrale du centre i ;
   c) La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1 ;
   d) L'homothétie de rapport 3 et de centre d'affixe $1+2i.$;
   e) La similitude de rapport 2 et d'angle $\pi/3$ et de centre $1+i$.
3. Décrire géométriquement et déterminer la nature des similitudes correspondant aux applications suivantes :
$$\varphi_1 : z \mapsto \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+3, \qquad \varphi_2 : z \mapsto i\,\bar{z}.$$
4. Démontrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
5. Démontrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

Solutions :

1.
a) $f_1(z) = z+3-2i$, correspond à la translation d'affixe $3-2i$

b) $f_2(z) = e^{i2\pi/7}z$, correspond à la rotation de centre $(0,0)$ (l'origine) et d'angle $\frac{2\pi}{7}$

c) $f_3(z) = e^{i2\pi/3}z-1$, on cherche d'abord un point fixe :,

$$z = e^{\frac{2\pi}{3}}z-1 \Leftrightarrow z(1-e^{\frac{2\pi}{3}}) = -1 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}$$

Donc, f_3 correspond à la rotation de centre $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$(le point d'affixe $-\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}$) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

d) $f_4(z) = 3z-5+i$, on cherche d'abord un point fixe :

$$z = 3z-5+i \Leftrightarrow z = \frac{5}{2}-\frac{i}{2}$$

Donc, f_4 correspond à l'homothétie de centre le point d'affixe $z = \frac{5}{2}-\frac{i}{2}$ et de rapport 3.

e) $f_5(z) = (2+2i)z+3i$. on cherche d'abord un point fixe :

$$f_5(z) = z \Leftrightarrow (2+2i)z+3i = z \Leftrightarrow z = \frac{-3i}{1+2i} \Leftrightarrow z = -\frac{6}{5}-\frac{3i}{5}$$

De plus,
$$|2+2i| = 2\sqrt{2} \text{ et } \arg(2+2i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$
Donc, f_5 correspond à la similitude de centre le point d'affixe $z = -\frac{6}{5} - \frac{3i}{5}$, de rapport $2\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2.
a. $z \mapsto z - 2 + i$

b. La symétrie centrale est une rotation d'angle π, donc la transformation est : $z \mapsto e^{i\pi}(z-i)+i = 2i-z$

c. $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{6}}(z-1)+1$.

d. $z \mapsto 3(z-(1+2i)) + (1+2i)$.

e. $z \mapsto 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-(1+i)) + (1+i)$.

3.
a.On cherche d'abord un point fixe, on a :
$$\varphi_1(z) = z \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 3 \Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{3}} z + 3 = z \Leftrightarrow z = \frac{3}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}} \Leftrightarrow z = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
Par conséquent, φ_1 correspond à la rotation de centre le point d'affixe $\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b.
$$\varphi_2(z) = i\overline{z} = e^{i\frac{\pi}{2}}\overline{z} = e^{i2\frac{\pi}{4}}\overline{(z-0)} + 0$$
Par conséquent, φ_2 est la symétrie d'axe passant par 0 et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe (Ox).

4. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{S}_{a,\theta}$ (et $\mathcal{S}_{b,\varphi}$) les symétries par rapport aux axes passant par a (et b) et d'angle θ (et φ) par rapport à (Ox).

On a : $\forall z \in \mathbb{C}\ \mathcal{S}_{a,\theta}(z) = e^{i2\theta\pi}(\overline{z-a}) + a$ et $\forall z \in \mathbb{C}\ \mathcal{S}_{b,\varphi}(z) = e^{i2\varphi\pi}(\overline{z-b}) + b$.
Donc,
$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{b,\varphi} \circ \mathcal{S}_{a,\theta}(z) &= \mathcal{S}_{b,\varphi}\left(e^{i2\theta\pi}(\overline{z-a}) + a\right) \\ &= e^{i2\varphi\pi}(\overline{e^{i2\theta\pi}(\overline{z-a}) + a} - b) + b. \\ &= e^{2i(\varphi-\theta)\pi} z - e^{2i(\varphi-\theta)\pi} a + e^{2i\varphi}(\bar{a} - \bar{b}) + b.\end{aligned}$$
Donc, $\mathcal{S}_{b,\varphi} \circ \mathcal{S}_{a,\theta}$ est une translation si $2(\varphi - \theta) \equiv [2\pi]$, une rotation d'angle $2(\varphi-\theta)$ sinon (et de centre l'affixe du point fixe de la composée).

5. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. On note $r_{a,\theta}$ (et $r_{b,\varphi}$) la rotation d'angle θ (et φ) et ce centre a (et b).
On a :
$$\begin{aligned}r_{b,\varphi} \circ r_{a,\theta}(z) &= r_{b,\varphi}\left(e^{i\theta}(z-a) + a\right) \\ &= e^{i\varphi}(e^{i\theta}(z-a) + a - b) + b \\ &= e^{i(\varphi+\theta)} z + e^{i\varphi}(-e^{i\theta} a + a - b) + b.\end{aligned}$$
Par conséquent, $r_{b,\varphi} \circ r_{a,\theta}$ est une translation si $\varphi + \theta \equiv 0[2\pi]$, une rotation d'angle $\varphi + \theta$ sinon (et de centre le point fixe de la composée).

Exercice 36. Soit s une similitude directe telle que $s(2-i)=1$ et $s(-1+2i)=1+6i$. Déterminer l'homothétie h et la rotation r telles que $s=h\circ r$. Donner l'affixe du point fixe de s.

Solution : Soit s une similitude directe, alors $\exists\, a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$ tel que :

$$s(z)=az+b \quad \forall\, z\in\mathbb{C}.$$

On a : $\begin{cases} s(2-i)=1 \\ s(-1+2i)=1+6i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(2-i)+b=1 \\ a(-1+2i)+b=1+6i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(3-3i)=-6i \\ b=1-a(2-i) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1-i \\ b=3i \end{cases}$ Donc $s(z)=(1-i)z+3i\ \forall\, z\in\mathbb{C}$.

Par conséquent, $s=h\circ r$, où h est une homothétie de rapport $|a|=\sqrt{2}$ et r est une rotation d'angle $\arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}$ et de même centre.
Cherchons un point fixe de s, z_0 est un point fixe $\Leftrightarrow z_0(1-i)+3i=z_0 \Leftrightarrow z_0=3$.
On a :

$$s(z)=\sqrt{2}\left((e^{-\frac{\pi}{4}}(z-3)+3)-3\right)+3.$$

Exercice 37. On dit qu'un ensemble d'applications E est *stable par composition* si $f\circ g\in E$ pour toutes applications $f,g\in E$. Les ensembles suivants de transformations planes sont-ils ou non stables par composition ?

a) L'ensemble des translations ?
b) L'ensemble des homothéties ?
c) L'ensemble des homothéties de rapport strictement supérieur à 1 ?
d) L'ensemble des homothéties et des translations ?
e) L'ensemble des symétries par rapport à des droites ?
f) L'ensemble des rotations ?
g) L'ensemble des symétries et des rotations ?
h) L'ensemble des symétries, des rotations et des translations ?
i) L'ensemble des similitudes directes ?

Solution :

a) L'ensemble des translations est stable par composition :
Soit t_v la translation du vecteur d'affixe v
On a : $t_w\circ t_v(z)=t_w(z+v)=z+v+w=t_{v+w}$.

b) L'ensemble des homothéties n'est pas stable par composition :
Soient $h:z\mapsto 2z$ et $f:z\mapsto \frac{1}{2}z+1$ deux homothéties, on a : $(f\circ h)(z)=z+1$.

c) L'ensemble des homothéties de rapport strictement supérieur à 1 est stable par composition, en effet, soient $h:z\mapsto az+b$ avec $a<1$ et $f:z\mapsto cz+d$ avec $c<1$
On a : $(f\circ h)(z)=c(az+b)+d=(ca)z+cb+d$. avec $ca<1$

d) L'ensemble des homothéties et des translations est stable par composition.
Il paraît que cet ensemble est égale à $\{z\mapsto az+b, a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{C}\}$.
Soient $f:z\mapsto az+b$ et $g:z\mapsto cz+d$ dans cet ensemble, on a $(f\circ g)(z)=(ca)z+cb+d$, comme $ca\in\mathbb{R}^*$ alors la stabilité est assurée.

e) L'ensemble des symétries par rapport aux droites n'est pas stable par composition, en effet pour toute symétrie $\mathcal{S}$ on a $S \circ S(z) = z$ et l'indentité n'est pas une symétrie.

f) L'ensemble des rotations n'est pas stable par composition, en effet :
Soient $r : z \mapsto e^{i\theta}z + a$ et $f : z \mapsto e^{i\varphi}z + b$, on a $(f \circ r)(z) = e^{i(\theta+\varphi)}z + e^{i\varphi}a + b$, la composition est une rotation ssi $\theta + \varphi \not\equiv 0[2\pi]$. sinon, il s'agit d'une translation.

g) L'ensemble des symétries et des rotations n'est pas stable, en effet, la composition de deux rotations peut donner une translation (d'après f.).

h) L'ensemble des symétries, des rotations et des translations est stable par composition.
En effet, il suffit de démontrer l'égalité avec cet ensemble :

$$\left\{z :\mapsto e^{i\theta}z + b, \theta \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}\right\} \bigcup \left\{z :\mapsto e^{i\theta}\overline{z} + b, \theta \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}\right\}.$$

Puis, démontrer la stabilité de cet ensemble.

i) L'ensemble des similitudes directes est stable par composition.
En effet, cet esemble est l'ensemble des applications de la forme $f : z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Exercice 38. On se place dans le plan complexe. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Soit r la transformation du plan, qui, à un point M d'affixe z, associe le point M_0 d'affixe $z_0 = jz+3$.

a) Déterminer les points invariants (points fixes) de r, et la nature de la transformation r.
b) Soit M un point d'affixe z. Calculer l'affixe du point $r^2(M)$, où on note $r^2 = r \circ r$, et déterminer la nature de la transformation r^2.
c) Soit M un point d'affixe z. Calculer l'affixe du point $r^3(M)$, où $r^3 = r \circ r \circ r$. Que peut-on dire de la transformation r^{-1} du plan ?

Solution :

a) $r(z) = jz + 3,\ j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On a $r(z) = z \Leftrightarrow jz + 3 = z \Leftrightarrow \frac{3}{1-j}$. r est la rotation de centre $\frac{3}{1-j}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) On a $r^2 = r \circ r$ par définition, on commence d'abord par calculer r^2.
$r^2(z) = r(jz+3) = j^2z + 3j + 3$ donc l'affixe du point $r^2(M)$ est $j^2z + 3j + 3$. r^2 est la rotaion de centre $\frac{3}{1-j}$ et d'angle j^2.

c) On a $r^3(z) = r(r^2) = j(j^2z + j3 + 3) + 3 = j^3(z) + 3(1 + j + j^2) = z + 3\frac{j^3-1}{j-1} = z$ car $j \neq 1$ et $j^3 = 1$.
Donc l'affixe du point $r^3(M)$ est égale l'affixe du point M qui vaut z.
Finalement, r^3 est l'indetité alors $r^{-1} = r^2$.

Exercice 39. On identité $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. On considère la transformation $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie, pour $z \in \mathbb{C}$, par

$$f(z) = 2\overline{z} + 3 - 4i.$$

a) Calculer le(s) points fixe(s) de f.
b) Quelle est la nature de l'application f ?
c) Donner une équation cartésienne du cercle C de centre $1 - i$ et de rayon 2.
d) Calculer $f(1 - i)$. En déduire une équation cartésienne de l'image de C par la transformation f.

Solutions :
a) On écrit z sous forme algébrique, i.e $z = a + bi$, alors on a :
$f(z) = z \Leftrightarrow 2\overline{z} + 3 - 4i = z \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3 = a \\ -2b-4 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}$.
b) f est la composé d'une symétrie axiale $z \mapsto \overline{z}$ et d'une homothétie de rapport 2 et de centre $-3 - \frac{4}{3}i$.

c) L'équation du cercle de centre $1 - i$ et de rayon 2 est donnée par :

$$\{z \in \mathbb{C}, |z - (1-i)|^2 = 4\} = \{z \in \mathbb{C}, (Re(z) - 1)^2 + (Im(z) + 1)^2 = 4\}.$$

Après identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}$, l'équation devient :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4\}.$$

d) D'abord on a : $f(1 - i) = 2(1 + i) + 3 - 4i = 5 - 2i$. Ensuite, on sait que les similitudes (directes et indirectes) envoie des cercles vers des cercles, comme f est la composé d'une symétrie axiale (qui n'augmente pas le rayon) et d'une homothétie (qui multiplie le rayon par le rapport de l'homothétie) alors le cercle image est le cercle de centre $f(1 - i)$ et de rayon 16.
L'équation du cercle image est :

$$\{z \in \mathbb{C}, |z - (5 - 2i)|^2 = 16\}.$$

Après identification avec $\mathbb{R}^2$, on obtient l'équation suivante :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x-5)^2 + (y+2)^2 = 16\}.$$

Exercice 40. Soient f et g les deux transformations du plan complexe définies par $f(z) = -z - 2i$ et $g(z) = 2z - 1 - i$.

a) Déterminer les points fixes de f et g.
b) Démontrer que f et g sont deux homothéties dont on donnera le centre et le rapport.
c) Démontrer que $f \circ g$ est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.
d) Démontrer que ces trois centres sont alignés.

Solution :
a) On a $f(z) = z \Leftrightarrow -z - 2i = z \Leftrightarrow z = -i$ et $g(z) = z \Leftrightarrow 2z - 1 - i = z \Leftrightarrow z = 1 + i$

b) $f(z) = -(z - (-i)) + (-i)$ donc f est l'homothétie de centre $-i$ et de rapport -1.
$g(z) = 2(z - (1 + i)) + (1 + i)$ donc, g est l'homothétie de centre $1 + i$ et de rapport 2.

c) On calcule d'abord $f \circ g$,
On a : $f \circ g(z) = -(2z - 1 - i) - 2i = -2z + 1 - i$. Ensuite, on cherche un point fixe, on a : $f \circ g(z) = z \Leftrightarrow -2z + 1 - i = z \Leftrightarrow z = \frac{1-i}{3}$. Donc : $f \circ g$ est l'homothétie de centre $\frac{1-i}{3}$ et de rapport -2.

d) Démontrons que les 3 points fixes sont alignés :
Par définition : trois points dans le plan complexe z_1, z_2 et z_3 sont alignés $\Leftrightarrow$ il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(z_1 - z_2) = \beta(z_1 - z_3)$.
Ici on a : $\left((-i) - (\frac{1-i}{3})\right) = (\frac{1}{3})\left((-i) - (1+i)\right)$. Donc les trois points sont alignés.

9. Quelques ensembles de points

Exercice 41. Pour chacune des relations suivantes, déterminer l'ensemble des nombres complexes z qui la vérifient :

a) $|(1-i)z-3i|=3$ b) $|1-z|\leqslant 1/2$ c) $\mathrm{Re}(1-z)\leqslant \frac{1}{2}$ d) $\mathrm{Re}(iz)\leqslant \frac{1}{2}$

e) $\left|1-\frac{1}{z}\right|^2=2$ f) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right|=1$ g) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right|=2$ h) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right|<2$

Solution :

a) On a

$$|(1-i)z-3i|=3 \Leftrightarrow |1-i||z-\frac{3i}{1-i}|=3 \Leftrightarrow |z-\frac{3(i-1)}{2}|=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Donc $\{z\in\mathbb{C}, |(1-i)z-3i|=3\}$ est le cercle de centre $\frac{3(i-1)}{2}$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

b) $\{z\in\mathbb{C}, |1-z|\leqslant 1/2\}$ est le disque de centre 1 et de rayon $1/2$.

c)

$$\mathrm{Re}(1-z)\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\mathrm{Re}(z)\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq\mathrm{Re}(z).$$

Donc,$\{z\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}(1-z)\leq\frac{1}{2}\}$ est le demi-plan $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\geq\frac{1}{2}.\}$

d)

$$\mathrm{Re}(iz)\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\mathrm{Im}(z)\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\mathrm{Im}(z)\geq-\frac{1}{2}.$$

Donc, $\{z\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}(iz)\leq\frac{1}{2}\}$ est le demi-plan $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y\geq-\frac{1}{2}.\}$

e) On a :

$$\begin{aligned}\left|1-\frac{1}{z}\right|^2=2 &\Leftrightarrow |z-1|^2=2|z|^2 \text{ et } z\neq 0\\ &\Leftrightarrow |z|^2-z-\overline{z}+1=2|z|^2 \text{ et } z\neq 0\\ &\Leftrightarrow |z|^2+z+\overline{z}+1=2 \text{ et } z\neq 0\\ &\Leftrightarrow |z+1|^2=2 \text{ et } z\neq 0\\ &\Leftrightarrow |z-(-1)|=\sqrt{2} \text{ et } z\neq 0.\end{aligned}$$

Donc, $\{z\in\mathbb{C}, |1-\frac{1}{z}|^2=2\}$ est le cercle de centre -1 et de rayon $\sqrt{2}$.

f) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right|=1\Leftrightarrow |z-3|=|z-5|\Leftrightarrow$ z est sur la médiatrice de 5 et 3.
Donc, $\{z\in\mathbb{C}, \left|\frac{z-3}{z-5}\right|=1\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x=4\}$.

g) On a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z-5}\right|=2 &\Leftrightarrow |z-3|^2=4|z-5|^2\\ &\Leftrightarrow |z|^2-3z-3\overline{z}+9=4|z|^2-20z-20\overline{z}+100\\ &\Leftrightarrow 3|z|^2-17z-17\overline{z}+91=0\\ &\Leftrightarrow |z|^2-\frac{17}{3}z-\frac{17}{3}\overline{z}+\frac{91}{3}=0\\ &\Leftrightarrow |z-\frac{17}{3}|^2-\frac{16}{9}=0.\\ &\Leftrightarrow |z-\frac{17}{3}|=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Donc, $\{z \in \mathbb{C}, \left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 2\}$ est le cercle de centre $\frac{17}{3}$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

h) On a $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| < 2 \Leftrightarrow |z - \frac{17}{3}| > \frac{4}{3}$.
Donc, $\{z \in \mathbb{C}, \left|\frac{z-3}{z-5}\right| < 2\}$ est le complémentaire du disque (fermé) de centre $\frac{17}{3}$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

Exercice 42. Montrer que, dans le plan complexe, l'ensemble $\left\{\dfrac{1}{1+it}\ ,\ t \in \mathbb{R}\right\}$ est contenu dans le cercle de centre 1/2 et de rayon 1/2. Est-ce le cercle tout entier ?

Solutions :
- On $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$, on a $\forall t \in \mathbb{R}$: $\dfrac{1}{1+it} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1-it}{1+it}$ et comme $\left|\dfrac{1-it}{1+it}\right| = 1$ On a alors : $\frac{1}{1+it} \in \mathcal{C}\ \forall t \in \mathbb{R}$, on remarque que $0 \notin \{t \in \mathbb{R}, \frac{1}{1+it}\}$, donc ce n'est pas le cercle tout entier.

- On peut même démontrer que $\{t \in \mathbb{R}, \frac{1}{1+it}\} = \mathcal{C} \setminus \{0\}$.
D'après l'exercice 20., si $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $t = tan(\frac{\theta}{2}) \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^{i\theta} = \frac{1-it}{1+it}$$

Cela démontre l'inclusion inverse, c'est à dire que $\mathcal{C} \setminus \{0\} \subset \{t \in \mathbb{R}, \frac{1}{1+it}\}$. D'où l'égalité.