Mathématiques - DS n°4

Partie CUPGE

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : (Arithmétique)

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système de conguences suivant :

$$x \equiv 4 \mod 6 \quad \text{et} \quad x \equiv 7 \mod 9.$$

2. (a) Montrer que tout entier naturel congru à 3 modulo 4 possède au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4.
   (b) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
3. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$, le n^e nombre de Fermat.
   (a) Montrer que $F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.
   (b) Montrer que $F_m \wedge F_n = 1$ pour $m \neq n$ entiers.
   (c) Montrer que tout entier naturel n qui n'est pas de la forme 2^m possède un diviseur impair autre que 1. En déduire que, si $2^n + 1$ est premier, alors soit c'est un nombre de Fermat, soit $n = 0$.

Exercice 2 : (Dérivabilité)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que si f est majorée, alors f est constante.
2. Soient $a < b$ des réels, et $g \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$. On suppose que $g(a) = g(b) = 0$ et $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que

$$g(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} g''(d).$$

(Indication : Considérer $G : t \mapsto g(t) + \lambda(t-a)(b-t)$ où λ est choisi pour que $G(c) = 0$. Utiliser Rolle deux fois pour G puis pour G'.)

3. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que h est dérivable en 0 avec $h'(0) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall (x,y) \in]0,\delta[^2 \quad \left| \frac{h(x) - h(-y)}{x+y} - \ell \right| \leq \epsilon.$$

Exercice 3 : (Polynômes)

1. Soient $a \neq b$ éléments d'un corps K et $P \in K[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$. Montrer que si z est une racine de P, alors z^2 et $(z-1)^2$ aussi. En déduire que toute racine $\neq 0$ est de module 1, puis que les seules racines possibles sont 0 et 1. En déduire tous les polynômes solution de cette équation.