Université Claude Bernard - Lyon 1 | Semestre d'Automne 2025-2026
Cursus préparatoire : Analyse 1 et Algèbre 1 | 17 Décembre 2025

Devoir surveillé N°4
Durée : 1h30

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.** *Calculatrices et notes de cours sont interdites. Le sujet est* ***recto-verso****. Le barème indiqué est approximatif.*

Exercice 1 (4 points)**.**

1. Trouver les couples $(a, b) \in \mathbb{Z}$ solutions de l'équation $49a - 24b = 3$.
2. Montrer que $7^{54} - 9^{23}$ est divisible par 11.

Solution:

1. $49 = 7^2$ et $24 = 2^3 \cdot 3$ sont premiers entre eux. On a la relation de Bézout $49 - 2 \times 24 = 1$. En multipliant par 3 on trouve que $(3, 6)$ est solution particulière de l'équation. Considérons maintenant une autre solution (a, b). Alors
$$49(a - 3) - 24(b - 6) = 0.$$
Donc 24 divise $49(a - 3)$. Comme 24 et 49 sont premiers entre eux, on a donc 24 qui divise $a - 3$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 24k + 3$. En réinjectant dans l'équation précédente, on en déduit que $b = 49k + 6$. Réciproquement, tout couple de la forme $(24k + 3, 49k + 6)$ avec k entier est bien solution de l'équation de départ.
2. Comme 11 est premier, d'après le petit théorème de Fermat on a $7^{10} \equiv 1 \mod 11$ et $9^{10} \equiv 1 \mod 11$. Il s'ensuit que
$$7^{54} = (7^{10})^5 \cdot 7^4 \equiv 7^4 \mod 11.$$
Puisque $7^2 = 49 \equiv 5 \mod 11$, on a $7^4 \equiv 5^2 \equiv 3 \mod 11$.

   D'un autre côté, $9^{23} = (9^{10})^2 \cdot 9^3 \equiv 9^3 \mod 11$. Or $9^2 = 81 \equiv 4 \mod 11$, d'où $9^3 \equiv 4 \times 9 \equiv 3 \mod 11$.

   D'après ce qui précède, $7^{54} - 9^{23} \equiv 3 - 3 \equiv 0 \mod 11$, d'où le résultat.

Exercice 2 (6 points)**.** *Soient K un corps et Q un polynôme non nul de $K[X]$. On rappelle que Q est scindé sur K s'il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans K.*

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$, scindé sur $\mathbb{R}$, possédant r racines réelles distinctes $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$. On note m_i la multiplicité de α_i pour $i = 1, \ldots, r$ et λ le coefficient dominant de P, de sorte que

$$P(X) = \lambda(X - \alpha_1)^{m_1} \cdots (X - \alpha_r)^{m_r}.$$

1. Montrer que si α est racine de P de multiplicité $m > 1$, alors α est racine de P' de multiplicité $m - 1$ (refaire la démonstration du cours).
2. On suppose dans cette question uniquement que P est simplement scindé, c'est-à-dire que $m_i = 1$ pour $i = 1, \ldots, r$. Montrer que P' est aussi simplement scindé sur $\mathbb{R}$.
3. Déduire de 1. et de la preuve de 2. que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ dans le cas général.
4. Déduire de la question précédente que le polynôme $P^2 + 1$ est simplement scindé sur $\mathbb{C}$.

Solution:

1. D'après le cours, α est racine d'ordre m si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$. En posant $Q = P'$, on a $Q^{(k)} = P^{(k+1)}$ pour tout entier $k \geq 0$. Il s'ensuit que $Q(\alpha) = \cdots = Q^{(m-2)}(\alpha) = 0$ et $Q^{(m-1)}(\alpha) \neq 0$. D'où le résultat.

   Deuxième preuve. Par définition, α est racine d'ordre m de P si et seulement si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$. En dérivant et en factorisant par $(X - \alpha)^{m-1}$, on obtient

   $$P'(X) = (X - \alpha)^{m-1} R(X), \quad \text{où on a posé } R(X) = mQ(X) + (X - \alpha)Q'(X).$$

   Comme on a $R(\alpha) = mQ(\alpha) \neq 0$, on a bien α racine d'ordre $m - 1$ de P'.

2. Remarque : d'une manière générale, $n = m_1 + \cdots + m_r$. Ici, on a donc $n = r$. Soit $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. La fonction polynomiale associée à P est continue / dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier elle l'est aussi sur le segment $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$. Par ailleurs $P(\alpha_i) = P(\alpha_{i+1}) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$. On a donc trouvé $n-1$ racines réelles distinctes de P', à savoir $c_1 < \cdots < c_{n-1}$. Comme P' a degré $n - 1 \geq 0$, ce sont toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$, et on en déduit que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

3. Cas général. Rappelons que P a degré $n = m_1 + \cdots + m_r$. D'après la question 1., si $m_i > 1$ alors α_i est racine d'ordre $m_i - 1$ de P' pour $i = 1, \ldots, r$. Cela donne

   $$(m_1 - 1) + \cdots + (m_r - 1) = m_1 + \cdots + m_r - r = n - r$$

   racines réelles de P' comptées avec multiplicité. D'un autre côté, la preuve de la question précédente montre que P' possède (au moins) une racine réelle dans chaque intervalle $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$. Cela donne $r - 1$ racines réelles supplémentaires distinctes des précédentes. Donc P' possède au moins $n - r + r - 1 = n - 1$ racines réelles comptées avec multiplicité. Comme P' a degré $n - 1 \geq 0$, ce sont toutes les racines de P' (dans $\mathbb{C}$). Donc P' est scindé dans $\mathbb{R}$.

4. On pose $Q = P^2 + 1$. D'après le théorème fondamental de l'algèbre, Q est scindé sur $\mathbb{C}$. D'après la question 1., Q est simplement scindé si Q et Q' n'ont pas de racine commune. Or $Q' = 2P'P$, qui est scindé sur $\mathbb{R}$ puisque P et P' le sont. Donc toutes les racines de Q' sont réelles. D'un autre côté, le polynôme Q ne possède aucune racine réelle (pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $Q(x) \geq 1$). Donc Q et Q' n'ont pas de racine commune.

Exercice 3 (7 points)**.** On dit que (x, y, z) est un *triplet de Markov* si x, y, z sont des entiers ≥ 1 satisfaisant l'équation de Markov

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

1. Déterminez tous les triplets de Markov de la forme (x, x, x).
2. Montrez qu'il n'y a pas de triplet de Markov de la forme (x, z, z) avec $x < z$.
3. Supposons maintenant que (x, x, z) est un triplet de Markov avec $x < z$.
   (a) Montrez que x^2 divise z^2, puis que x divise z (on justifiera).
   (b) Écrivons $z = kx$ avec $k \in \mathbb{N}$. Déterminez les valeurs possibles pour k, puis en déduire l'ensemble des triplets de Markov de la forme (x, x, z) avec $x < z$.
4. On définit la fonction T par la formule

$$T(x, y, z) = (x, y, 3xy - z).$$

   On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie par $(F_0, F_1) = (0, 1)$ et par la relation de récurrence

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0).$$

   (a) Montrez que si (x, y, z) est un triplet de Markov, alors $T(x, y, z)$ vérifie l'équation de Markov.
   (b) Étant donné un entier $n \geq 1$, on note $M_n = (1, F_{2n-1}, F_{2n+1})$. Montrez que $M_{n+1} = T(1, F_{2n+1}, F_{2n-1})$.
   (c) Prouvez que M_n est un triplet de Markov pour tout entier $n \geq 1$.

Solution:

1. On tombe sur l'équation $3x^2 = 3x^3$. Après simplification ($x \neq 0$) cela donne $x = 1$.
2. Par l'absurde, supposons que (x, z, z) est un triplet de Markov, avec $x < z$. Alors on doit avoir $x^2 + 2z^2 = 3xz^2$. Donc $x^2 = z^2(3x - 2)$. Or le membre de droite est clairement $> x^2$ (puisque $3x - 2 \geq 1$) : absurde.
3. Supposons maintenant que (x, x, z) est un triplet de Markov avec $x < z$.
   (a) On déduit de l'équation de Markov que $2x^2 + z^2 = 3x^2z$, ce qu'on réécrit $z^2 = x^2(3z - 2)$. On a donc x^2 qui divise z^2. On a vu en TD que cela impliquait que x divise z. Il suffit d'écrire $x = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$ et $z = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i}$, avec $p_1, \ldots, p_s$ nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$ (éventuellement nuls). On a alors

$x^2 = \prod p_i^{2\alpha_i}$ et $z^2 = \prod p_i^{2\beta_i}$. La condition $x^2 \mid z^2$ implique que $2\alpha_i \leq 2\beta_i$, donc $\alpha_i \leq \beta_i$, donc $x \mid z$...

(b) Écrivons $z = kx$ avec $k \in \mathbb{N}$. Comme $x, z \geq 1$ par hypothèse, on a $k \geq 1$, et même $k \geq 2$ puisque $z > x$. On déduit de $z^2 = x^2(3z - 2)$ que $k^2 = 3kx - 2$, ce qu'on réécrit $k(3x - k) = 2$. On a donc k qui divise 2, donc $k = 2$, et on doit avoir $3x - k = 1$, ce qui impose $x = 1$. Donc $(x, x, z) = (1, 1, 2)$ est l'unique solution.

4. On définit la fonction T par la formule

$$T(x, y, z) = (x, y, 3xy - z).$$

On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie par $(F_0, F_1) = (0, 1)$ et par la relation de récurrence

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0).$$

(a) Supposons que (x, y, z) est un triplet de Markov, donc $x^2+y^x+z^2 = 3xyz$. Vérifions que $T(x, y, z) = (a, b, c)$ vérifie l'équation de Markov. On a

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + (3xy - z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 9x^2y^2 - 6xyz \\ &= 9x^2y^2 - 3xyz \\ &= 3xy(3xy - z) = 3abc. \end{aligned}$$

Donc $T(x, y, z)$ vérifie l'équation de Markov.

(b) Il s'agit de montrer la relation $F_{2n+3} = 3F_{2n+1} - F_{2n-1}$. Or on a

$$F_{2n+3} = F_{2n+2} + F_{2n+1} = (F_{2n+1} + F_{2n}) + F_{2n+1},$$

et on conclut en écrivant $F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$.

(c) On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$ on a $M_1 = (1, F_1, F_3) = (1, 1, 2)$ qui est solution. Supposons que M_n est un triplet de Markov pour un entier $n \geq 1$ fixé. Alors $(1, F_{2n+1}, F_{2n-1})$ (qui est juste une permutation des coordonnées de M_n) est aussi un triplet de Markov, et $M_{n+1} = T(1, F_{2n+1}, F_{2n-1})$ vérifie l'équation de Markov, donc est un triplet de Markov (ce sont des entiers ≥ 1).

Exercice 4 (4 points)**.** Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit ℓ un nombre réel tel que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell.$$

1. On suppose dans cette question que $\ell = 0$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \geq M$, on a

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{f(M)}{x}\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) En déduire le résultat dans ce cas.

2. Démontrer le résultat dans le cas général.
3. Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim_{x\to+\infty} g(x)/x = \ell$. A-t-on forcément $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = \ell$? (On justifiera soigneusement sa réponse.)

Solution:

1. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \geq M$ on a $|f'(x)| \leq \varepsilon/2$. Soit $x \geq M$. Le TAF sur $[M, x]$ implique qu'il existe $c \in]M, x[$ tel que $f(x) = f(M) + (x - M)f'(c)$. Comme $|f'(c)| \leq \varepsilon/2$, on en déduit que

$$|f(x)| \leq |f(M)| + \varepsilon|x - M| \leq |f(M)| + x\frac{\varepsilon}{2}.$$

   On obtient le résultat en divisant par x.

   (b) Puisque M est fixé, quand on fait tendre x vers l'infini le terme $|f(M)/x|$ tend vers 0. Il existe donc $N \geq M$ tel que pour tout $x \geq N$ on a $|f(M)|/x \leq \varepsilon/2$. D'après ce qui précède, pour tout $x \geq N$, on a $|f(x)/x| \leq \varepsilon$. Donc on a bien que $f(x)/x$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini.

2. On pose $g(x) = f(x) - \ell x$ pour tout $x > 0$. Cette fonction vérifie les hypothèses de la question 1., donc $\lim_{x\to\infty} g(x)/x = 0$. Comme $g(x)/x = f(x)/x - \ell$, on en déduit que $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = \ell$.

3. Non. Prendre par exemple $g(x) = \cos(x)$. On a $\lim_{x\to\infty} g(x)/x = 0$, mais $g'(x) = -\sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.