Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'Automne 2025-2026

Cursus préparatoire : Analyse 1 et Algèbre 1 17 Décembre 2025

Devoir surveillé N°4

Durée : 1h30

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.** *Calculatrices et notes de cours sont interdites. Le sujet est* ***recto-verso****. Le barème indiqué est approximatif.*

Exercice 1 (4 points)**.**

1. Trouver les couples $(a, b) \in \mathbb{Z}$ solutions de l'équation $49a - 24b = 3$.
2. Montrer que $7^{54} - 9^{23}$ est divisible par 11.

Exercice 2 (6 points)**.** *Soient K un corps et Q un polynôme non nul de $K[X]$. On rappelle que Q est scindé sur K s'il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans K.*

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$, scindé sur $\mathbb{R}$, possédant r racines réelles distinctes $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$. On note m_i la multiplicité de α_i pour $i = 1, \ldots, r$ et λ le coefficient dominant de P, de sorte que

$$P(X) = \lambda(X - \alpha_1)^{m_1} \cdots (X - \alpha_r)^{m_r}.$$

1. Montrer que si α est racine de P de multiplicité $m > 1$, alors α est racine de P' de multiplicité $m - 1$ (refaire la démonstration du cours).
2. On suppose dans cette question uniquement que P est simplement scindé, c'est-à-dire que $m_i = 1$ pour $i = 1, \ldots, r$. Montrer que P' est aussi simplement scindé sur $\mathbb{R}$.
3. Déduire de 1. et de la preuve de 2. que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ dans le cas général.
4. Déduire de la question précédente que le polynôme $P^2 + 1$ est simplement scindé sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3 (7 points)**.** On dit que (x, y, z) est un *triplet de Markov* si x, y, z sont des entiers ≥ 1 satisfaisant l'équation de Markov

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

1. Déterminez tous les triplets de Markov de la forme (x, x, x).
2. Montrez qu'il n'y a pas de triplet de Markov de la forme (x, z, z) avec $x < z$.
3. Supposons maintenant que (x, x, z) est un triplet de Markov avec $x < z$.
   (a) Montrez que x^2 divise z^2, puis que x divise z (on justifiera).
   (b) Écrivons $z = kx$ avec $k \in \mathbb{N}$. Déterminez les valeurs possibles pour k, puis en déduire l'ensemble des triplets de Markov de la forme (x, x, z) avec $x < z$.

4. On définit la fonction T par la formule
$$T(x,y,z) = (x, y, 3xy - z).$$
On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie par $(F_0, F_1) = (0, 1)$ et par la relation de récurrence
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0).$$
   (a) Montrez que si (x,y,z) est un triplet de Markov, alors $T(x,y,z)$ vérifie l'équation de Markov.
   (b) Étant donné un entier $n \geq 1$, on note $M_n = (1, F_{2n-1}, F_{2n+1})$. Montrez que $M_{n+1} = T(1, F_{2n+1}, F_{2n-1})$.
   (c) Prouvez que M_n est un triplet de Markov pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 4 (4 points)**.** Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit ℓ un nombre réel tel que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$. Le but de cet exercice est de montrer que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell.$$

1. On suppose dans cette question que $\ell = 0$.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \geq M$, on a
$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{f(M)}{x}\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$
   (b) En déduire le résultat dans ce cas.
2. Démontrer le résultat dans le cas général.
3. Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim_{x\to+\infty} g(x)/x = \ell$. A-t-on forcément $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = \ell$? (On justifiera soigneusement sa réponse.)