**Université Claude Bernard Lyon 1** Semestre d'automne 2025-2026
Cursus prépa - Première année

---

**Mathématiques - DS n°3**
Partie CUPGE
Documents et calculettes interdits

---

**Exercice 1 :** (Suites)

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que les deux suites convergent vers 1.
(Indication : Supposons que $(u_n)_n$ ne converge pas vers 1. Trouver $\epsilon > 0$ telle que $(u_n)_n$ possède ne suite extraite à valeurs dans $[0, 1-\epsilon]$. Obtenir une contradiction à $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1$ et conclure.)
2. (a) Définir quand deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que les deux suites données par
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \big(1 + \frac{1}{k \cdot k!}\big) \qquad \text{et} \qquad v_n = \big(1 + \frac{1}{n \cdot n!}\big) u_n$$
   pour $n \geq 1$ convergent vers une même limite réelle.

**Solution**

1. Supposons que $(u_n)_n$ ne converge pas vers 1. Alors il y a $\epsilon > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a $i \geq N$ avec $|u_i - 1| \geq \epsilon$. Puisque $u_i \in [0,1]$ cela veut dire $u_i \in [0, 1-\epsilon]$. On prend un tel $i = i_n$ minimal possible avec $i_n \geq i_{n-1}$ (pour $n = 0$ la condition est vide). Alors $(u_{i_n})_n$ est une suite extraite de $(u_n)_n$. Mais
$$\lim_{n\to\infty} u_{i_n} v_{i_n} = lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1.$$
Or, $0 \leq v_{i_n} \leq 1$ et $0 \leq u_{i_n} \leq 1-\epsilon$, d'où $u_{i_n} v_{i_n} \leq 1-\epsilon$, une contradiction.
Donc $(u_n)_n$ converge vers 1 ; par symétrie $(v_n)_n$ aussi.
2. (a) Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, et $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.
   (b) Notons que les suites sont positives. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} > 1$, donc $(u_n)_n$ est croissante. De plus,
$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\big(1 + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!}\big) u_{n+1}}{\big(1 + \frac{1}{n \cdot n!}\big) u_n} = \frac{\big(1 + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!}\big)^2}{1 + \frac{1}{n \cdot n!}} = \frac{1 + \frac{2}{(n+1)\cdot(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)^2 \cdot ((n+1)!)^2}}{1 + \frac{1}{n \cdot n!}} \\ &\leq \frac{1 + \frac{n}{n\cdot(n+1)!} + \frac{1}{n\cdot(n+1)!}}{1 + \frac{1}{n \cdot n!}} = \frac{1 + \frac{n+1}{n\cdot(n+1)!}}{1 + \frac{1}{n \cdot n!}} = 1.\end{aligned}$$
   Donc $(v_n)_n$ est décroissante. Enfin, $u_n \leq v_n$ et
$$v_n - u_n = \big(1 + \frac{1}{n \cdot n!}\big) u_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} u_n \leq \frac{1}{n \cdot n!} v_n \leq \frac{1}{n \cdot n!} v_0 \to 0$$
   quand $n \to \infty$. Ainsi les deux suites sont adjacentes ; d'après le théorème des suites adjacentes elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

**Exercice 2 :** (Les complexes)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   (a) $iz^2 + (2-3i)z - (5-5i) = 0$.
   (b) $3z^2 - 5|z|^2 + 2 = 0$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$ pour $x \notin \{\frac{\ell\pi}{2} : \ell \in \mathbb{Z}\}$.

3. Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes.
   (a) Montrer que $|z_1|+|z_2| \leq |z_1+z_2|+|z_1-z_2|$ (on essaiera d'additionner deux inégalités triangulaires bien choisies — s'inspirer de la partie (b)).
   (b) Interpréter géométriquement cette inégalité (une histoire de parallélogramme).
4. Caractériser géométriquement l'application complexes $z \mapsto (1-i)z + 2i - 1$.

**Solution**

1. (a) Le discriminant est

$$\Delta = (2-3i)^2 - 4i(-5+5i) = 4 - 9 - 12i + 20i + 20 = 15 + 8i.$$

On pose $\delta = a + ib$, donc $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2abi = \Delta = 15 + 8i$. Ainsi

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 15, \\ 2ab &= 8, \text{ et} \\ a^2 + b^2 &= |\delta|^2 = |\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17. \end{aligned}$$

Ainsi $2a^2 = 15 + 17 = 32$ et $a = \pm 4$, d'où $b = \pm 1$ et $\delta = \pm(4+i)$. Les solutions sont donc

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-(2-3i)+(4+i)}{2i} = \frac{2+4i}{2i} = 2 - i \text{ et} \\ z_2 &= \frac{-(2-3i)-(4+i)}{2i} = \frac{-6+2i}{2i} = 1 + 3i. \end{aligned}$$

   (b) On pose $z = x + iy$. Alors

$$0 = 3z^2 - 5|z|^2 + 2 = 3(x^2 - y^2 + 2xyi) - 5(x^2 + y^2) + 2 = -2x^2 - 8y^2 + 2 + 6xyi.$$

En prenant la partie imaginaire, on voit que $xy = 0$, et donc $x = 0$ ou $y = 0$.
1er cas : $x = 0$. Alors $8y^2 = 2$, d'où $y = \pm\frac{1}{2}$.
2me cas : $y = 0$. Alors $2x^2 = 2$, d'où $x = \pm 1$.
Les solutions sont donc $\pm\frac{1}{2}i$ et $\pm 1$.

2. On calcule

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx) + i\sin(kx)}{\cos^k(x)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k = \frac{1 - (e^{ix(n+1)}/\cos^{n+1}(x))}{1 - (e^{ix}/\cos(x))} \\ &= \frac{1 - \frac{\cos((n+1)x)+i\sin((n+1)x)}{\cos^{n+1}(x)}}{1 - \frac{\cos(x)+i\sin(x)}{\cos(x)}} \\ &= \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x) - i\sin((n+1)x)}{-i\cos^n(x)\sin(x)} \\ &= \frac{i(\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)) + \sin((n+1)x)}{\cos^n(x)\sin(x)} \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n(x)\sin(x)}$$

tant que $x \notin \{\frac{\ell\pi}{2} : \ell \in \mathbb{Z}\}$.

3. (a) On a

$$\begin{aligned} 2|z_1| = |2z_1| = |(z_1+z_2) + (z_1-z_2)| &\leq |z_1+z_2| + |z_1-z_2|, \text{ et} \\ 2|z_2| = |2z_2| \leq |(z_1+z_2) - (z_1-z_2)| &\leq |z_1+z_2| + |z_1-z_2|, \text{ d'où} \\ 2(|z_1|+|z_2|) &\leq 2(|z_1+z_2| + |z_1-z_2|), \end{aligned}$$

ce qui montre l'inégalité recherché.

(b) On considèrre le parallelogramme $(0, z_1, z_2, z_1 + z_2)$. Alors la somme des longueurs de deux cotés adjacentes est plus petit ou égal à la somme des longueurs des deux diagonales.

4. On calcule le point fixe. Donc $z = (1-i)z + 2i - 1$ donne $iz = 2i + i^2$, soit $z = 2 + i$. On a $|1-i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$. Il s'agit donc d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et d'une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$, les deux de centre d'affixe $2 + i$.

<u>**Exercice 3 :**</u> (Continuité)

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue, telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Déterminer $f$.
(Indication : On montrera que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $f(nx) = nf(x)$. Puis on calculera les valeurs de $f$ sur $\mathbb{N}$, puis sur $\mathbb{Z}$, puis sur $\mathbb{Q}$, puis sur $\mathbb{R}$.)
2. (a) Définir ce qu'est une fonction réelle $k$-lipschitzienne.
(b) Montrer qu'une fonction $g$ réelle $k$-lipschitzienne avec $k < 1$ admet un unique point fixe.
(Indication : On considerera la suite défini par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.)

**Solution**

1. En posant $x = y = 0$ on a $f(0) = f(0) + f(0)$, soit $f(0) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ ; on montre par récurrence que $f(nx) = nf(x)$. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. On suppose donc que $f(nx) = nf(x)$. Alors
$$f((n+1)x = f(nx) + f(x) = af(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$
Ainsi $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En particulier, avec $a = f(1)$ on a $f(n) = na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, $0 = f(0) = f(n + (-n)) = na + f(-n)$. Ainsi $f(-n) = -na$ et $f(z) = za$ pour tout $z \in Z$. De plus,
$$nf(\tfrac{m}{n}x) = f(n\tfrac{m}{n}x) = f(mx) = ma,$$
d'où $f(\frac{m}{n}x) = \frac{m}{n}a$, et $f(qx) = qa$ pour $q \in \mathbb{Q}$.
Enfin, pour tout réel $r \in \mathbb{R}$ il y a une suite rationnelle $(q_i)_i$ qui converge vers $r$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Alors par continuité de $f$ on a $f(r) = \lim_{i\to\infty} f(q_i) = \lim_{i\to\infty} q_i a = ra$.
2. (a) Une fonction réelle est $k$-lipschitzienne si pour tout $x, y \in \mathrm{dom}\,(f)$ on a $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$.
(b) On pose $r = |g(0)|$, et on note récursivement $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |g(u_{n+1}) - g(u_n)| \leq k\,|u_{n+1} - u_n| \leq k^{n+1}\,|u_1 - u_0| = k^{n+1}r.$$
Alors
$$|u_n| = |\sum_{\ell=0}^{n-1}(u_{\ell+1} - u_\ell)| \leq \sum_{\ell=0}^{n-1}|u_{\ell+1} - u_\ell| \leq \sum_{\ell=0}^{n-1}k^\ell r = \frac{1-k^n}{1-k}r < \frac{1}{1-k}r.$$
La suite est donc borné et possède une suite extraite $(u_{n_i})_i$ convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Soit $\ell = \lim_{i\to\infty} u_{n_i}$. Alors par continuité de $g$ (puisqu'une fonction lipschitzienne est continue) on a
$$|g(\ell) - \ell| = \lim_{i\to\infty}|g(u_{n_i}) - u_{n_i}| = \lim_{i\to\infty}|u_{n_i+1} - u_{n_i}| \leq \lim_{i\to\infty}k^i r = 0.$$
Ainsi $\ell$ est un point fixe de $g$. Si $\ell'$ en était un autre, alors
$$|\ell - \ell'| = |g(\ell) - g(\ell')| \leq k|\ell - \ell'| < |\ell - \ell'|$$
puisque $k < 1$, ce qui implique $\ell = \ell'$. Le point fixe est donc unique.