Université Claude Bernard Lyon 1
Cursus prépa - Première année

Mathématiques - DS n°3

PARTIE CUPGE

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : (Suites)

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que les deux suites convergent vers 1.
   (Indication : Supposons que $(u_n)_n$ ne converge pas vers 1. Trouver $\epsilon > 0$ telle que $(u_n)_n$ possède une suite extraite à valeurs dans $[0, 1-\epsilon]$. Obtenir une contradiction à $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1$ et conclure.)
2. (a) Définir quand deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que les deux suites données par
   $$u_n = \prod_{k=1}^{n} \big(1 + \frac{1}{k \cdot k!}\big) \qquad \text{et} \qquad v_n = \big(1 + \frac{1}{n \cdot n!}\big) u_n$$
   pour $n \geq 1$ convergent vers une même limite réelle.

Exercice 2 : (Les complexes)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   (a) $iz^2 + (2-3i)z - (5-5i) = 0$.
   (b) $3z^2 - 5|z|^2 + 2 = 0$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$ pour $x \notin \{\frac{\ell\pi}{2} : \ell \in \mathbb{Z}\}$.
3. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.
   (a) Montrer que $|z_1| + |z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$ (on essaiera d'additionner deux inégalités triangulaires bien choisies — s'inspirer de la partie (b)).
   (b) Interpréter géométriquement cette inégalité (une histoire de parallélogramme).
4. Caractériser géométriquement l'application complexes $z \mapsto (1-i)z + 2i - 1$.

Exercice 3 : (Continuité)

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue, telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Déterminer f.
   (Indication : On montrera que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $f(nx) = nf(x)$. Puis on calculera les valeurs de f sur $\mathbb{N}$, puis sur $\mathbb{Z}$, puis sur $\mathbb{Q}$, puis sur $\mathbb{R}$.)
2. (a) Définir ce qu'est une fonction réelle k-lipschitzienne.
   (b) Montrer qu'une fonction g réelle k-lipschitzienne avec $k < 1$ admet un unique point fixe.
   (Indication : On considerera la suite défini par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.)