

Mathématiques - DS n°2

PARTIE CUPGE

Corrigé

Exercice 1 :

1. Est-ce que les énoncés suivants sont équivalents :

$$P \rightarrow (Q \leftrightarrow R) \quad \text{et} \quad (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \rightarrow R).$$

2. Donner la négation de l'énoncé suivant, où f est une fonction réelle :

$$\exists x \forall y > 0 \exists z > 0 \forall u (|u| < z \rightarrow |f(u) - x| < y).$$

Que signifie cet énoncé ?

Solution.

- 1.

P	Q	R	$Q \leftrightarrow R$	$P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow R$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La 5me et la dernière colonne sont égales. les deux propositions sont donc équivalentes.

2. La négation est

$$\forall x \exists y > 0 \forall z > 0 \exists u (|u| < z \wedge |f(u) - x| \geq y).$$

L'énoncé (original) signifie que f est continue en 0.

Exercice 2 : Soit $f : X \rightarrow Y$ une application.

- Montrer que f est injective ssi pour tout $X' \subseteq X$ on a $f^{-1}[f[X']] = X'$.
- Montrer que f est surjective ssi pour tout $Y' \subseteq Y$ on a $f[f^{-1}[Y']] = Y'$.

Solution.

- Soit f injective, et $X' \subseteq X$. Si $x \in X'$, alors $f(x) \in f[X']$ et $x \in f^{-1}[f[X']]$. Donc $X' \subseteq f^{-1}[f[X']]$. Inversement, soit $x \in f^{-1}[f[X']]$. Alors $f(x) \in f[X']$, et il y a $y \in X'$ avec $f(x) = f(y)$. Par injectivité, $x = y \in X'$. Donc $f^{-1}[f[X']] \subseteq X'$, et on a égalité.
Réciproquement, supposons $f^{-1}[f[X']] = X'$ pour tout $X' \subseteq X$, et considérons $x, y \in X$ avec $f(x) = f(y)$. On pose $X' = \{y\}$. Alors $x \in f^{-1}[f[X']] = X' = \{y\}$, ce qui donne $x = y$. Ainsi f est injective.
- Soit f surjective, et $Y' \subseteq Y$. Si $y \in f[f^{-1}[Y']]$, alors $y = f(x)$ pour un $x \in f^{-1}[Y']$, ce qui implique $y = f(x) \in Y'$ et $f[f^{-1}[Y']] \subseteq Y'$. Inversement, soit $y \in Y'$. Comme f est surjective, il y a $x \in X$ avec $f(x) = y$, et $x \in f^{-1}[Y']$. Alors $y = f(x) \in f[f^{-1}[Y']]$. Donc $Y' \subseteq f[f^{-1}[Y']]$, et on a égalité.
Réciproquement, supposons $f[f^{-1}[Y']] = Y'$ pour tout $Y' \subseteq Y$. En prenant $Y' = Y$ on a $\text{im } f \supseteq f[f^{-1}[Y]] = Y$, et f est surjective.

Exercice 3 : Soit R une relation symétrique sur un ensemble non-vidé X telle que pour tout $x \in X$ il y a $x' \in X$ avec xRx' . On définit la relation E sur X par

$$xE x' \text{ ssi } \exists n \in \mathbb{N}^* \exists x_0, \dots, x_n \in X (x = x_0 \wedge x' = x_n \wedge \bigwedge_{i=1}^n x_{i-1} R x_i).$$

Montrer que E est une relation d'équivalence.

Solution. Soit $x \in X$. Par hypothèse il y a $x' \in X$ avec xRx' , et donc $x'R x$ puisque R est symétrique. Ainsi x, x', x témoigne que $xE x$, et E est réflexif.

Soient $x, x' \in X$ avec $xE x'$. Donc il y a $x = x_0, \dots, x_n = x' \in X$ tel que $x_{i-1} R x_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Par symétrie de R on a $x_i R x_{i-1}$, et la suite $x' = x_n, x_{n-1}, \dots, x_0 = x$ témoigne que $x'E x$. Ainsi E est symétrique.

Soient $x, x', x'' \in X$ avec $xE x'$ et $x'E x''$. Donc il y a $x = x_0, \dots, x_n = x' \in X$ et $x' = x'_0, \dots, x'_k = x'' \in X$ avec $x_{i-1} R x_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et $x'_{i-1} R x'_i$ pour $i = 1, \dots, k$. Alors la suite $x = x_0, x_1, \dots, x_n = x'_0, x'_1, \dots, x'_k = x''$ témoigne que $xE x''$. Ainsi E est transitive.

Il en suit que E est une relation d'équivalence.

Exercice 4 : Soient K, L, M des corps ordonnés avec $K \subseteq L \subseteq M$.

1. (a) Donner la définition qu'une partie $X \subseteq K$ est dense dans K .
- (b) Montrer que si K est dense dans M , alors K est dense dans L et L est dense dans M .
- (c) Montrer que si K est dense dans L et L est dense dans M , alors K est dense dans M .
2. (a) Donner la définition que K est archimédien.
- (b) Montrer que si L est archimédien, alors K est archimédien.

Solution.

1. (a) X est dense dans K si $X \cap [a, b] \neq \emptyset$ pour tout $a < b$ dans K .
- (b) Soit K dense dans M , et $a < b$ dans L . Alors $a, b \in M$, et il y a $x \in K$ avec $a \leq x \leq b$ par densité de K dans M . Ainsi K est dense dans L . Pour la deuxième partie, si $a < b$ dans M , puisque K est dense dans M et $K \subseteq L$ on a $\emptyset \neq K \cap [a, b] \subseteq L \cap [a, b]$. Ainsi L est dense dans M .
- (c) Soit K dense dans L et L dense dans M . Considérons $a < b$ dans M . Alors $a < \frac{2a+b}{3} < \frac{a+2b}{3} < b$. Par densité de L dans M il y a $a' \in [a, \frac{2a+b}{3}] \cap L$ et $b' \in [\frac{a+2b}{3}, b] \cap L$. Donc $a' < b'$ dans L , et par densité de K dans L il y a $x \in [a', b'] \cap K$. Alors $x \in [a, b] \cap K$. Ceci montre que K est dense dans L .
2. (a) K est archimédien si pour tout $a > 0$ dans K et tout $b \in K$ il y a $n \in \mathbb{N}$ avec $a + \dots + a \geq b$ (n termes).
- (b) Soit $a > 0$ dans K et $b \in K$. Alors $a, b \in L$ et par archimédianité de L il y a $n \in \mathbb{N}$ avec $a + \dots + a \geq b$ (n termes). Ceci montre que K est archimédien.

Exercice 5 : Soit $(u_n)_n$ une suite bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \sup\{u_i : i \geq n\}$.

1. Justifier l'existence de v_n .
2. Montrer que v_n est décroissante, et en déduire que v_n est convergente.
3. En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass. (Attention : $(v_n)_n$ n'est pas suite extraite de $(u_n)_n$.)
4. Montrer qu'une suite $(w_n)_n$ non-bornée admet une suite extraite qui diverge vers ∞ ou $-\infty$.

Solution.

1. On a $u_n \in \{u_i : i \geq n\}$, donc cet ensemble est non-vidé, et il est majoré puisque la suite $(u_n)_n$ l'est. D'après l'axiome de la borne supérieure le sup existe.
2. Pour $m \leq n$ on a $\{u_i : i \geq m\} \supseteq \{u_i : i \geq n\}$, et donc

$$v_m = \sup\{u_i : i \geq m\} \geq \sup\{u_i : i \geq n\} = v_n.$$

Ainsi la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

Or, si M minore la suite $(u_n)_n$, alors M minore tous les u_i , et donc $v_n = \sup\{u_i : i \geq n\}$. Donc $(v_n)_n$ est une suite décroissante minorée, qui doit converger dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème de la suite monotone.

3. Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. On construit récursivement une suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge vers ℓ . Supposons qu'on ait trouvé $i_0 < i_1 < \dots < i_{k-1}$ telle que $|\ell - u_{i_j}| \leq \frac{1}{j+1}$ pour $j = 0, \dots, k-1$. (L'hypothèse est vide pour $k = 0$.) Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ell$ il y a $N \in \mathbb{N}$ telle que $|v_n - \ell| \leq \frac{1}{k+1}$ pour $n \geq N$, et on peut prendre $N \geq i_{k-1}$ si $k \neq 0$. Puisque $v_N = \sup\{u_i : i \geq N\}$ il y a $n \geq N$ tel que $u_n \in [v_N - \frac{1}{k+1}, v_N]$. Or $(v_n)_n$ est décroissante et donc $v_n \geq \ell$. Il en découle que

$$\ell - \frac{1}{k+1} \leq v_N - \frac{1}{k+1} \leq u_n \leq v_N \leq \ell + \frac{1}{k+1}.$$

Alors $i_k = n \geq N > i_{k-1}$ convient. On a bien $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{i_k} = \ell$.

4. Si $(w_n)_n$ n'est pas majoré, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a $i_n \in \mathbb{N}$ avec $w_{i_n} \geq n$. De même, si $(w_n)_n$ n'est pas minoré, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a $i_n \in \mathbb{N}$ avec $w_{i_n} \leq -n$. Si on enlève les termes répétés, on obtient une suite extraite qui diverge vers $\pm\infty$.