

---

**Mathématiques - DS n°2**  
PARTIE CUPGE  
Documents et calculatrices interdits

---

**Exercice 1 :**

1. Est-ce que les énoncés suivants sont équivalents :

$$P \rightarrow (Q \leftrightarrow R) \quad \text{et} \quad (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \rightarrow R).$$

2. Donner la négation de l'énoncé suivant, où  $f$  est une fonction réelle :

$$\exists x \forall y > 0 \exists z > 0 \forall u (|u| < z \rightarrow |f(u) - x| < y).$$

Que signifie cet énoncé ?

**Exercice 2 :** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application.

1. Montrer que  $f$  est injective ssi pour tout  $X' \subseteq X$  on a  $f^{-1}[f[X']] = X'$ .
2. Montrer que  $f$  est surjective ssi pour tout  $Y' \subseteq Y$  on a  $f[f^{-1}[Y']] = Y'$ .

**Exercice 3 :** Soit  $R$  une relation symétrique sur un ensemble non-vide  $X$  telle que pour tout  $x \in X$  il y a  $x' \in X$  avec  $xRx'$ . On définit la relation  $E$  sur  $X$  par

$$xE x' \quad \text{ssi} \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \exists x_0, \dots, x_n \in X (x = x_0 \wedge x' = x_n \wedge \bigwedge_{i=1}^n x_{i-1} R x_i).$$

Montrer que  $E$  est une relation d'équivalence.

**Exercice 4 :** Soient  $K, L, M$  des corps ordonnés avec  $K \subseteq L \subseteq M$ .

1. (a) Donner la définition qu'une partie  $X \subseteq K$  est dense dans  $K$ .  
(b) Montrer que si  $K$  est dense dans  $M$ , alors  $K$  est dense dans  $L$  et  $L$  est dense dans  $M$ .  
(c) Montrer que si  $K$  est dense dans  $L$  et  $L$  est dense dans  $M$ , alors  $K$  est dense dans  $M$ .
2. (a) Donner la définition que  $K$  est archimédien.  
(b) Montrer que si  $L$  est archimédien, alors  $K$  est archimédien.

**Exercice 5 :** Soit  $(u_n)_n$  une suite bornée. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $v_n = \sup\{u_i : i \geq n\}$ .

1. Justifier l'existence de  $v_n$ .
2. Montrer que  $v_n$  est décroissante, et en déduire que  $v_n$  est convergente.
3. En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass. (Attention :  $(v_n)_n$  n'est pas suite extraite de  $(u_n)_n$ .)
4. Montrer qu'une suite  $(w_n)_n$  non-bornée admet une suite extraite qui diverge vers  $\infty$  ou  $-\infty$ .