Mathématiques - DS n°1
Partie CUPGE
Corrigé

Exercice 1 : On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_{2n} = u_n\,(u_{n-1} + u_{n+1}) \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

C'est la suite de *Fibonacci.*
[Indication. Quelle récurrence utiliser ? Faire une distinction par cas : a) Pour n petit (lesquels ?). b) Pour n pair. c) Pour n impair.]

Solution. Par récurrence forte. Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons $u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$ pour tout entier $k < n$.

Cas 1. $n = 0$. Alors $u_2 = 1 = 0 + 1 = u_0 + u_1$. L'assertion est vraie.

Cas 2. $n > 0$ pair. Soit donc $n = 2k$ pour un entier k ; on note que $n > 0$ implique $0 \leq k - 1 < k < n$. Alors par hypothèse de récurrence forte $u_{k+1} = u_{k-1} + u_k$ et $u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$. Donc

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} &= u_{2k} + u_{2k+1} = u_k\,(u_{k-1} + u_{k+1}) + (u_k^2 + u_{k+1}^2) = u_k\,(u_{k-1} + u_k) + u_{k+1}(u_k + u_{k+1}) \\ &= u_k\,u_{k+1} + u_{k+1}\,u_{k+2} = u_{k+1}\,(u_k + u_{k+2}) = u_{2(k+1)} = u_{n+2}. \end{aligned}$$

Cas 3. $n > 0$ impair. Soit donc $n = 2k+1$ pour un entier k ; on note que $0 \leq k < n$. Alors par hypothèse de récurrence forte $u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$. Donc

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} &= u_{2k+1} + u_{2(k+1)} = (u_k^2 + u_{k+1}^2) + u_{k+1}\,(u_k + u_{k+2}) = u_k\,(u_k + u_{k+1}) + u_{k+1}^2 + u_{k+1}u_{k+2} \\ &= u_k\,u_{k+2} + u_{k+1}u_{k+2} + u_{k+1}^2 = (u_k + u_{k+1})\,u_{k+2} + u_{k+1}^2 = u_{k+2}^2 + u_{k+1}^2 = u_{2(k+1)+1} = u_{n+2}. \end{aligned}$$

D'après le principe de la récurrence forte, l'assertion est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Évaluer la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i^3}{j^2}.$$

On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$.

Solution.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i^3}{j^2} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i^3}{j^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \sum_{i=1}^{j} i^3 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \left(\frac{j\,(j+1)}{2}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=2}^{n+1} j^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(\big(\sum_{j=1}^{n+1} j^2\big) - 1\Big) = \frac{1}{4}\Big(\frac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{6} - 1\Big) = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n}{24} \end{aligned}$$

Exercice 3 : On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \frac{x}{\tanh(x)}.$$

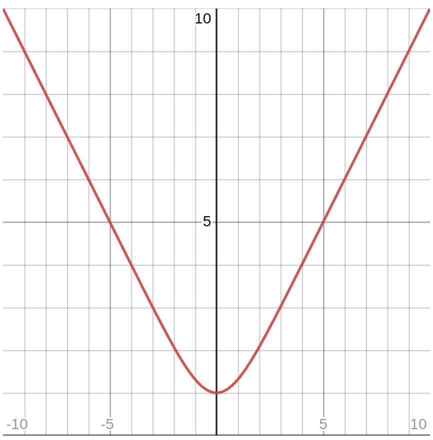
1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Donner la parité de f. La fonction f est-elle périodique ?
3. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal.
   [Il peut être utile de calculer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{f}$.]
4. Calculer la fonction dérivée de f.

5. Calculer la fonction dérivée de
$$g : x \mapsto x\tanh^2(x) - x + \tanh(x).$$
En déduire les signes de f'.
6. Donner le tableau de variations de f.
7. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
8. Dresser le graphe de f.

Solution.

1. tanh est défini sur $\mathbb{R}$ entier et ne s'annule qu'en 0. Donc le domaine maximal de définitin est $\mathbb{R}^*$.
2. $x \mapsto x$ est impair et tanh est impair, donc f est pair. En effet,
$$f(-x) = \frac{-x}{\tanh(-x)} = \frac{-x}{-\tanh(x)} = \frac{x}{\tanh(x)} = f(x).$$
Puisque $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (voir 3.), f ne peut pas être périodique.
3. $\lim_{x\to\pm\infty} \tanh(x) = \pm 1$. Donc $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. De plus,
$$\lim_{x\to 0} 1/f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\tanh(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tanh(0+x) - \tanh(0)}{x} = \tanh'(0) = 1 - \tanh^2(0) = 1.$$
Ainsi, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1/\lim_{x\to 0} 1/f(x) = 1/1 = 1$.
4. D'après la formule pour la fonction dérivé d'un quotient, et avec la fonction $g(x)$ de la partie 5., on a
$$f'(x) = \frac{\tanh(x) - x(1-\tanh^2(x))}{\tanh^2(x)} = \frac{\tanh(x) - x + x\tanh^2(x))}{\tanh^2(x)} = \frac{g(x)}{\tanh^2(x)}.$$
5.
$$g'(x) = \tanh^2(x) + x\,2\tanh(x)\,(1-\tanh^2(x)) - 1 + 1 - \tanh^2(x) = 2x\tanh(x)\,(1-\tanh^2(x)).$$
Or, $|\tanh(x)| < 1$ et $1 - \tanh^2(x) > 0$. De plus, $\tanh(x)$ et x ont même signe. Ainsi $g'(x) \geq 0$, avec $g'(x) = 0$ ssi $x = 0$. La fonction g est donc strictement croissante. Puisque $g(0) = 0$, on a $g(x) < 0$ pour $x < 0$, et $g(x) > 0$ pour $x > 0$. Enfin, $\tanh^2(x)$ est strictement positif, et $f'(x) = g(x)/\tanh^2(x)$. Ainsi $f'(x) < 0$ pour $x < 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.
6.

x	$-\infty$			0			∞
$f'(x)$		$-$		$\vert$		$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	1	$\vert$	1	$\nearrow$	∞

7. On cherche une asymptote de la forme $y = ax + b$. On calcule :
$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty}\tanh(x)} = \frac{1}{1} = 1 \\ b &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \Big(\frac{x}{\tanh(x)} - x\Big) = \lim_{x\to\infty} x\,\frac{1-\tanh(x)}{\tanh(x)} \\ &= \lim_{x\to\infty} x\,\frac{\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to\infty} x\,\frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} 2x\,e^{-x} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = 0. \end{aligned}$$
Donc f a comme asymptôte en ∞ la diagonale $y = x$. Par parité, en $-\infty$ il y a l'asymptôte $y = -x$.
8. 

Exercice 4 : On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \tanh^2 x.$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $[0, \infty[$.
2. Montrer que f, restreint à l'intervalle $[0, \infty[$ admet une fonction réciproque g, dont on précisera le domaine et l'ensemble d'arrivée.
3. Calculer une formule explicite pour g.

Solution.

1. tanh est continue, dérivable et strictement croissant, donc $\tanh^2$ aussi sur $[0, \infty[$.
2. $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$, donc $\lim_{x\to\infty} \tanh^2(x) = 1$. Ainsi $\mathrm{im}\,(f) = [0, 1[$ et $f : [0, \infty[\to [0, 1[$ est une bijection, qui admet une fonction réciproque continue, dérivable et strictement croissante $f^{-1} : [0, 1[\to [0, \infty[$.
3. On a $y = f(x) = \tanh^2(x)$, et donc

$$\sqrt{y} = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

puisque $\tanh(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Alors $\sqrt{y}\,(e^{2x} + 1) = e^{2x} - 1$, ce qui donne

$$e^{2x}\,(\sqrt{y} - 1) = -1 - \sqrt{y} \qquad \text{et} \qquad e^{2x} = \frac{1 + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{y}}.$$

Ainsi

$$x = \frac{1}{2} \ln\Big(\frac{1 + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{y}}\Big) = \frac{1}{2} \ln\Big(\frac{(1 + \sqrt{y})^2}{(1 - \sqrt{y})(1 + \sqrt{y})}\Big) = \frac{1}{2} \ln\Big(\frac{1 + y + 2\sqrt{y}}{1 - y}\Big).$$