
Mathématiques - DS n°1
PARTIE CUPGE
Corrigé

Exercice 1 : On définit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

C'est la suite de *Fibonacci*.

[Indication. Quelle récurrence utiliser ? Faire une distinction par cas : a) Pour n petit (lesquels ?). b) Pour n pair. c) Pour n impair.]

Exercice 2 : Évaluer la somme

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i^3}{j^2}.$$

On rappelle que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 3 : On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \frac{x}{\tanh x}.$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Donner la parité de f . La fonction f est-elle périodique ?
3. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal.
[Il peut être utile de calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f}$.]
4. Calculer la fonction dérivée de f .
5. Calculer la fonction dérivée de

$$g : x \mapsto x \tanh^2 x - x + \tanh x.$$

En déduire les signes de f' .

6. Donner le tableau de variations de f .
7. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
8. Dresser le graphe de f .

Exercice 4 : On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \tanh^2 x.$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $[0, \infty[$.
2. Montrer que f , restreint à l'intervalle $[0, \infty[$ admet une fonction réciproque g , dont on précisera le domaine et l'ensemble d'arrivée.
3. Calculer une formule explicite pour g .