**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre automne 2025–2026

Algèbre 1 et Analyse 1

---

**Feuille d'exercices n° 10**

DÉRIVABILITÉ

---

**Exercice 1.** Soit $a \in \mathbf{Z}$. On définit $f : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R},\ x \longmapsto x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur $a$ la fonction $f$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Lorsqu'il existe, à quelle condition ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. Dans ce cas, la dérivée de $f$ est-elle continue en 0 ?

**Exercice 2.** Soit $f$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x + \frac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction $f$ est continue sur $[0, 1]$, et dérivable sur $]0, 1[$.
2. La fonction $f$ est-elle dérivable en 0 ? En 1 ?
3. Montrer qu'il existe $c \in ]0, 1[$ tels que $f'(c) = 0$.

**Exercice 3.** Soient $n$ un entier $n \geq 1$ et une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $n$ fois dérivable, et telle que $f^{(n)}$ est continue. On suppose que $f$ s'annule en $n + 1$ points distincts.

Montrer que $f'$ s'annule au moins $n$ fois, puis que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

**Exercice 4.** À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $t > 0$

$$\arctan t > \frac{t}{1+t^2}.$$

**Exercice 5.** À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x\to\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right).$$

**Exercice 6.** Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$.

1. On suppose que pour $0 \leq x \leq 1$, on a $f'(x) \neq 0$. Montrer que $f$ est de signe constant sur $[0, 1]$.
2. On suppose de plus que $f'$ est continue sur $[0, 1]$, et que $f'(x) > 0$ pour $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que pour $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq mx$.

**Exercice 7.** Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbf{R})$ telle que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup\{f'(x) : x \in [a,b]\}$.
Montrer que $f$ est affine.

**Exercice 8.** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^*)$ telle que $\lim_{x\to\infty} xf'(x) = 1$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

**Exercice 9.** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ vérifiant pour tout $x$ réel, $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$. En remarquant que $f(\frac{x}{2}+3) = \frac{f(x)}{2} + 3$, montrer que $f'$ est constante, puis déterminer $f$.

**Exercice 10.** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ vérifiant $\lim_{x\to\infty}(f(x) + f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. (Indication : Considérer $g(x) = e^x f(x)$.)