Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2025–2026

Algèbre 1 et Analyse 1

Feuille d'exercices n° 10

Dérivabilité

Exercice 1. Soit $a \in \mathbf{Z}$. On définit $f : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R},\ x \longmapsto x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur a la fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Lorsqu'il existe, à quelle condition ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. Dans ce cas, la dérivée de f est-elle continue en 0 ?

Solutions :

1. f est prolongeable par continuité si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe.
Si $a \geq 1$ alors on $|f(x)| \leq x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. donc f est prolongeable pour en 0 si $a \geq 1$, et $f(0) = 0$.
Si $a \leq 0$, en testant la fonction $f(x)$ sur les valeurs $\frac{1}{2n\pi}$ et $\frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ on s'aperçoit que f n'est pas prolongeable par contuinité en 0 quand $a \leq 0$.
2. Ce prolongement est dérivable lorsque $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ admet une limite.
On a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^a cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x^{a-1} cos\left(\frac{1}{x}\right)$. donc f est dérivable $\Leftrightarrow, a \geq 2.$, la dérivée de f en 0 serait égale à 0 dans ce cas.
3. Supposons $a \geq 2$, on a : $f'(x) = ax^{a-1} cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^{a-2} sin\left(\frac{1}{x}\right)$, on sait que $\lim\limits_{x\to} ax^{a-1} cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
D'autre part, $x^{a-2} sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet une limite que lorsque $a \geq 3$ cette limite $= 0$.Par conséquent f' est continue en 0 si et seulement si $a \geq 3$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x + \frac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $[0, 1]$, et dérivable sur $]0, 1[$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? En 1 ?
3. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tels que $f'(c) = 0$.

Solutions :

1. On a : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, comme $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = -1$ alors : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x + \frac{x\ln(x)}{1-x} = 0$.Donc f est continue sur $[0, 1]$, ensuite, f est dérivable sur $]0, 1[$ par la dérivabilité de $x \mapsto x + \frac{x\ln(x)}{1-x}$ sur $]0, 1[$.
2. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+\frac{x\ln(x)}{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + \frac{\ln(x)}{1-x} = -\infty$ alors f n'est pas dérivable en 0. Pour calculer

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x + \frac{x\ln(x)}{1-x}}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} x\frac{h(x)}{g(x)}$$

avec $h(x) = x - 1 - \ln(x)$ et $g(x) = (x-1)^2$. On a

$$\begin{array}{lllll} h(1) = 0, & h'(x) = x - \dfrac{1}{x}, & h'(1) = 0, & h''(x) = \dfrac{1}{x^2}, & h''(1) = 1, \\ g(1) = 0, & g'(x) = 2(x-1), & g'(1) = 0, & g''(x) = 2, & g''(1) = 2. \end{array}$$

On applique alors la règle de l'Hôpital deux fois en commençant avec les fonctions h' et g', puis avec h et g. On trouve

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{h''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{2} \quad \text{puis} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}.$$

Donc, f est dérivable en 1.

3. On a f continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et $f(0) = f(1)$, alors par le théorème de Rolle, il existe $c \in]0,1[$ tel que : $f'(c) = f(1) - f(0) = 0$.

<u>Exercice 3.</u> Soient un entier $n \geq 1$ et une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, n fois dérivable, et telle que $f^{(n)}$ est continue. On suppose que f s'annule en $n+1$ points distincts. Montrer que f' s'annule au moins n fois, puis que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Solutions :

Soit (P_n) : Toute fonction n fois dérivable tel que $f^{(n)}$ est continue, si f s'annule en $n+1$ points distincts alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Initialisation : Soit f une fonction 1 fois dérivable tel que $f' = f^{(1)}$ est continue, si f s'annule 2 fois en deux points distincts, supposons : $f(a) = f(b) = 0, a \neq b$ alors par le théorème de Rolle il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(1)}(c) = 0$. Donc (P_1) est vérifiée.

Hérédité : supposons que (P_n) est vraie et montrons (P_{n+1}), soit f une fonction $n+1$ fois dérivable tel que $f^{(n+1)}$ est continue, si f s'annule en $n+2$ points distincts, alors si on note ces points par $a_0, a_1, ..., a_{n+2}$ on a : sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tels que $f'(b_i) = 0$ par le théorème de Rolle, la fonction f' est n fois dérivable et $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ est continue, f' s'annule en $n+1$ points distincts (les b_i) donc par (P_n), $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois, d'où (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : Toute fonction n fois dérivable tel que $f^{(n)}$ est continue, f s'annule en $n+1$ points distincts alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

<u>Exercice 4.</u> À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $t > 0$

$$\arctan t > \frac{t}{1+t^2}.$$

Solutions :

On sait que $arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}, \forall t \in \mathbf{R}$, par le TAF, il existe $z \in]0,t[$ tel que l'on a

$$arctan(t) = arctan(t) - actan(0) = t(arctan'(z)) = \frac{t}{1+z^2} > \frac{t}{1+t^2}.$$

Car $\frac{1}{1+z^2} > \frac{1}{1+t^2}$.

<u>Exercice 5.</u> À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x\to\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right).$$

Solutions :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$, on a : $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$.

On remarque que $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = f(x+1) - f(x)$, donc par le théorème des accroissements finis, il existe $c(x) \in]x, x+1[$ tel que $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = f'(c(x))$, par conséquent :

$$\lim_{x\to\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} f'(c(x)) = 1.$$

Exercice 6. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$.

1. On suppose que pour $0 \leq x \leq 1$, on a $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est de signe constant sur $[0,1]$.
2. On suppose de plus que f' est continue sur $[0,1]$, et que $f'(x) > 0$ pour $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que pour $x \in [0,1]$, $f(x) \geq mx$.

Solutions :

1. On suppose que f n'est pas de signe constant sur $[0,1]$ alors $\exists x, y \in]0,1]$ tel que $f(x) < 0$ et $f(y) > 0$, d'après le TVI, il existe $z \in [x,y], f(z) = 0$, puis en apliquant le TAF : $0 = fz) - f(0) = zf'(t)$ pour un certain $t \in [0,1]$, ce qui contredit le fait que $f'(x) \neq 0, \forall x \in [0,1]$.

2. f' est une fonction continue définie sur un segment, d'après le théorème du maximum appliqué à $-f'$, $\max(-f')$ et atteint, comme $\max(-f')$=-$\min(f')$ alors $\min(f')$ est aussi atteint, donc il existe $z \in [0,1]$ tel que $0 < f'(z) \leq f'(x), \forall x \in [0,1]$.

Le TAF $\implies$ $f(x) - f(0) = f(x) = xf'(l)$ pour un certain $l \in [0,1]$, d'après ce qui précède, $f(x) \geq f'(z)x$. Il suffit alors de prendre $m = f'(z)$ pour répondre à la question.

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbf{R})$ telle que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup\{f'(x) : x \in [a,b]\}$.
Montrer que f est affine.

Solutions :

cas1 : si $\sup\{f'(x) : x \in [a,b]\} = 0$, on a alors $f'(x) \leq 0, \forall x \in [a,b]$ donc f est décoissante, ainsi et comme $f(a) = f(b)$ on a alors : f est constante donc affine.

cas2 : le cas contraire, on considère la fonction $g(x) = f(x) - (x-a)\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$, on a dans ce cas

$$\sup\{g'(x) : x \in [a,b]\} = \sup\{f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} : x \in [a,b]\} = 0$$

$g(a) = g(b)(= f(a))$, donc g est constante d'après ce qui précède, par suite f est affine.

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^*)$ telle que $\lim_{x\to\infty} xf'(x) = 1$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Solutions :

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$ on a : $\exists r \in \mathbf{R}$, $\forall x \geq r$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante à partir d'un certain rang, donc forcément elle admet une limite.

Supposons que la limite de f est finie, notée l

On a alors d'une part $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - f(y) = l - f(y)$ pour un y fixé et $x \geq y$, d'autre part : $\exists c \in [y,x]$ tel

que $f(x) - f(y) = (x-y)f'(c)$, on a :
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-y}{x} = 1$, $\frac{x}{c} \geq 1$ et choisissons y tel que $\forall w \geq y$ on a $wf'(w) \geq \frac{1}{2}$, en combiannt ce qu'on a :

$$l - f(y) = \lim f(x) - f(y) = \lim (x-y)f'(c) = \lim \frac{x-y}{x}\frac{x}{c}cf'(c) \geq (\lim \frac{x-y}{x})(1)(\frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2}$$

Ce qui donne $(l - f(y) \geq \frac{1}{2})$, $\forall y$ à partir d'un certain rang, ce qui implique en passant à la limite en y que $0 \geq \frac{1}{2}$
Donc la limite de f ne peut être finie, en conséquence : $\lim f = +\infty$.

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ vérifiant pour tout x réel, $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$. En remarquant que $f(\frac{x}{2}+3) = \frac{f(x)}{2} + 3$, montrer que f' est constante, puis déterminer f.

Solutions :
On a :

$$\frac{f(x)}{2} + 3 = f \circ f\left(f(x)\right) = f \circ f \circ f(x) = f\left(f \circ f(x)\right)) = f\left(\frac{x}{2} + 3\right)$$

En dérivant cette relation on obtient : $(\frac{1}{2})f'(\frac{x}{2}+3) = (\frac{1}{2})f'(x) \implies f'(\frac{x}{2}+3) = f'(x)$.
On peut montrer par récurrence que : $\forall x \in R, f'(x) = f'\left(\frac{x+6(2^n-1)}{2^n}\right)$, on a alors , $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'(\frac{x+6(2^n-1)}{2^n}) = f'(6).$$

Ainsi, f' est constante sur tout $\mathbf{R}$, donc f est de la forme $x \mapsto ax + b$,
En remplaçant dans l'équation : $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$, on trouve :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad b = \frac{3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ vérifiant $\lim_{x\to\infty}(f(x) + f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. (Indication : Considérer $g(x) = e^x f(x)$.)
Solutions :

Posons $g(x) = e^x f(x)$ on a : $g'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$
Fixons $c > 0$, alors il existe N, $\forall x \geq N, -c \leq f(x) + f'(x) \leq c$ donc $-ce^x \leq g'(x) \leq ce^x$.
Cela implique que les fonctions $x \mapsto ce^x - g(x)$ et $x \mapsto ce^x + g(x)$ont des dérivées positives pour $x \geq N$.
Donc à partir de N, ces deux fonctions sont croisssantes, par suite il existe $d \in \mathbf{R}$ tel que $ce^x - g(x) \geq d$ et $ce^x + g(x) \geq d$ $\forall x \geq N$.
Ainsi :

$$-c + de^{-x} < e^{-x}g(x) = f(x) < c - de^{-x}$$

ce qui implique que $\forall x \geq N$, $|f(x)| \leq c$. comme cela est vrai pour tout c on a donc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, par conséquent $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ aussi.