Mathématiques - E2C Analyse 1
Corrigé

Exercice 1 : Les réels.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. Donner la définition de l'adhérence $\bar{A}$ de A dans $\mathbb{R}$.
2. Donner la définition que A est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\bar{A} = \mathbb{R}$.

Solution.

1. L'adhérence de A dans $\mathbb{R}$ est $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R} : \forall\, \epsilon > 0,\ A \cap\,]x-\epsilon, x+\epsilon[\, \neq \emptyset\}$.
2. A est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tous $a < b$ réels $A \cap\,]a, b[\, \neq \emptyset$.
3. Soit A dense dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ on a $x - \epsilon < x + \epsilon$, d'où $A \cap\,]x-\epsilon, x+\epsilon[\, \neq \emptyset$ par densité. Ainsi $x \in \bar{A}$ et $\mathbb{R} \subseteq \bar{A}$. Puisque $\bar{A} \subseteq \mathbb{R}$, on a égalité.
Réciproquement, soit $\bar{A} = \mathbb{R}$, et $a < b$ réels. On prend $x = \frac{a+b}{2}$ et $\epsilon = \left|\frac{a-b}{2}\right|$. Puisque $x \in \mathbb{R} = \bar{A}$, on a $\emptyset \neq A \cap\,]x-\epsilon, x+\epsilon[\, = A \cap A \cap\,]a, b[$, d'où A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Suites.
Soit $(h_n)_n$ la suite réelle donnée par $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On pose $u_n = h_n - \ln n$ et $v_n = h_n - \ln(n+1)$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Leur limite commune s'appelle la constante d'Euler, notée γ.
Indication : Utiliser le TAF avec la fonction ln.
2. En déduire que la suite $(h_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Solution.

1. La fonction ln est dérivable sur R_+^* avec fonction dérivée $\frac{1}{x}$. D'après le TAF, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il y a $c_n \in\,]n, n+1[$ avec $\frac{1}{c_n} = \ln(n+1) - \ln n$. Ainsi
$$u_{n+1} - u_n = h_{n+1} - \ln(n+1) - h_n + \ln n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{c_n} < 0,$$
$$v_{n+1} - v_n = h_{n+1} - \ln(n+2) - h_n + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{c_{n+1}} > 0.$$
Donc $(u_n)_n$ est décroissante et $(v_n)_n$ est croissante. De plus,
$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c_n} \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty$$
puisque $n < c_n < n+1$. Ainsi $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes elles convergent vers une même limite.
2. Puisque $\lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty}(h_n - \ln n) = \gamma \in \mathbb{R}$, on a
$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty}(h_n - \ln n) + \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty.$$

Exercice 3 : Continuité.
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. On suppose que f ne possède pas de plus petite période strictement positive.

1. Montrer que pour tout entier $n > 0$ il y a une période strictement positive $p_n < \frac{1}{n}$.
2. Montrer que pour tout $a < b$ et $n > 0$ il y a a_n avec $|a_n - b| < \frac{1}{n}$ et $f(a_n) = f(a)$.
3. Conclure que f est constante.

Solution.

1. Soit X l'ensemble non-vide des périodes positives de f. Alors X est minoré par 0 ; d'après l'axiome de la borne supérieure (et donc inférieure), $\inf X$ existe. On veut montrer que $\inf X = 0$. Sinon, $m = \inf X > 0$. On pose $\epsilon = \frac{m}{2}$. Alors il y a une période $p \in [m, m+\epsilon[$. Si $p = m$ alors p serait une période minimale. Donc $m < p$ et il y a une période $p' \in [m, p[$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$f(x + (p - p')) = f((x+p) - p') = f(x+p) = f(x).$$
Donc $p - p'$ est une période de f. Mais $0 < p - p' < \frac{m}{2} < m$, ce qui contredit la fait que m minore X. Ainsi $\inf X = 0$, et pour tout entier $n > 0$ il y a une période strictement positive $p_n < \frac{1}{n}$.
2. Puisque $p_n > 0$, par archimédianité de $\mathbb{R}$ il y a un n minimal avec $np_n > b - a$; puisque $b > a$ on a $n > 0$ et donc $(n-1)p_n < b - a \leq np_n$. On pose $a_n = a + np_n$. Alors $f(a) = f(a_n)$ puisque p_n est une période de f, et $b \leq a_n < b + p_n < b + \frac{1}{n}$, d'où $|a_n - b| < \frac{1}{n}$.
3. On a $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, et par continuité de f on a $f(b) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$. Ainsi $f(a) = f(b)$ pour tout $a < b$ et f est constante.

Exercice 4 : Dérivabilité.

Soit I une intervalle réel ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Énoncer le lemme des trois pentes.
2. Montrer que pour tout $a \in I$ les taux d'accroissement $\Delta_{f,a}(x)$ sont croissantes sur $I \setminus \{a\}$.
3. En déduire que f possède une dérivée à gauche et une dérivée à droite en a pour tout $a \in I$.
4. En déduire que f est continue sur I.

Solution.

1. Soient $a < b < c$ dans I. Si f est convexe sur I, alors
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$
2. La deuxième inégalité donne $\Delta_{f,c}(a) \leq \Delta_{f,c}(b)$, donc $\Delta_{f,c}(x)$ est croissante pour $x < c$. La première inégalité donne $\Delta_{f,a}(b) \leq \Delta_{f,a}(c)$, donc $\Delta_{f,a}(x)$ est croissante pour $x > a$. Enfin, l'inégalité entre les termes extrêmes donne $\Delta_{f,b}(a) \leq \Delta_{f,b}(c)$, donc $\Delta_{f,b}(x)$ est croissante de la gauche vers la droite de b. Puisque c'est vrai pour tout $a, b, c \in I$, $\Delta_{f,a}(x)$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$ pour tout $a \in I$.
3. Puisque I est ouvert, pour tout $a \in I$ il y a $a', a'' \in I$ avec $a' < a < a''$. Alors $\Delta_{f,a}(x)$ est croissante sur $]a', a[$ et majoré par $\Delta_{f,a}(a'')$. Ainsi $f'_g(a) = \lim_{x\to a^-} \Delta_{f,a}(x)$ existe. De même, $\Delta_{f,a}(x)$ est croissante sur $]a, a''[$ et minoré par $\Delta_{f,a}(a')$. Ainsi $f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \Delta_{f,a}(x)$ existe.
4. Soit $m = \max\{|f'_g(a)|, |f'_d(a)|\}$. Alors
$$0 \leq \lim_{x\to a} |f(a) - f(x)| = \lim_{x\to a} |\Delta_{f,a}(x)|\,|a-x| \leq m \lim_{x\to a} |a - x| = 0$$
et f est continue en a, pour tout $a \in I$.

Exercice 5 : Fonctions usuelles.

Soit $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On considère la fonction réelle $f : x \mapsto \ln\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ sur I.

1. Montrer que f est bien définie et donner sa parité.
2. Montrer que pour tout $x \in I$ on a
$$(a)\ \tanh(f(x)) = \sin(x). \qquad (b)\ \cosh(f(x)) = \frac{1}{\cos(x)}. \qquad (c)\ \sinh(f(x)) = \tan(x).$$
3. Calculer la fonction dérivée de f.
4. Donner le tableau de variations de f.

Solution.

1. Pour $x \in I$ on a $0 < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, et donc $0 < \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) < \infty$. Donc f est bien défini sur I. On a

$$f(-x) = \ln \tan\left(\frac{-x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \ln \tan^{-1}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\ln \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -f(x).$$

   Donc f est impaire.

2. On pose $x' = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$. Alors $\sin(x') \neq 0 \neq \cos(x')$, et

$$\begin{aligned}
\tanh(f(x)) &= \frac{e^{f(x)} - e^{-f(x)}}{e^{f(x)} + e^{-f(x)}} = \frac{\tan(x') - 1/\tan(x')}{\tan(x') + 1/\tan(x')} = \frac{\sin^2(x') - \cos^2(x')}{\sin^2(x') + \cos^2(x')} \\
&= -\cos(2x') = -\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x)\,; \\
\cosh(f(x)) &= \frac{e^{f(x)} + e^{-f(x)}}{2} = \frac{\tan(x') + 1/\tan(x')}{2} = \frac{\sin^2(x') + \cos^2(x')}{2\cos(x')\sin(x')} \\
&= \frac{1}{\sin(2x')} = \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos(x)}\,; \\
\sinh(f(x)) &= \frac{e^{f(x)} - e^{-f(x)}}{2} = \frac{\tan(x') - 1/\tan(x')}{2} = \frac{\sin^2(x') - \cos^2(x')}{2\cos(x')\sin(x')} \\
&= \frac{-\cos(2x')}{\sin(2x')} = \frac{-\cos(x + \frac{\pi}{2})}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).
\end{aligned}$$

3. Avec x' comme en 2. on a

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}/\cos^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}))}{\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2\cos(x')\sin(x')} = \frac{1}{\sin(2x')} = \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos(x)}.$$

4.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞