Université Claude Bernard Lyon 1
Cursus prépa - Première année

Semestre d'automne 2025-2026

Mathématiques - E2C Analyse 1

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Les réels.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. Donner la définition de l'adhérence $\bar{A}$ de A dans $\mathbb{R}$.
2. Donner la définition que A est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\bar{A} = \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Suites.

Soit $(h_n)_n$ la suite réelle donnée par $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On pose $u_n = h_n - \ln n$ et $v_n = h_n - \ln(n+1)$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Leur limite commune s'appelle la constante d'Euler, notée γ.
   Indication : Utiliser le TAF avec la fonction ln.
2. En déduire que la suite $(h_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 3 : Continuité.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. On suppose que f ne possède pas de plus petite période strictement positive.

1. Montrer que pour tout entier $n > 0$ il y a une période strictement positive $p_n < \frac{1}{n}$.
2. Montrer que pour tout $a < b$ et $n > 0$ il y a a_n avec $|a_n - b| < \frac{1}{n}$ et $f(a_n) = f(a)$.
3. Conclure que f est constante.

Exercice 4 : Dérivabilité.

Soit I une intervalle réel ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Énoncer le lemme des trois pentes.
2. Montrer que pour tout $a \in I$ les taux d'accroissement $\Delta_{f,a}(x)$ sont croissantes sur $I \setminus \{a\}$.
3. En déduire que f possède une dérivée à gauche et une dérivée à droite en a pour tout $a \in I$.
4. En déduire que f est continue sur I.

Exercice 5 : Fonctions usuelles.

Soit $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On considère la fonction réelle $f : x \mapsto \ln\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ sur I.

1. Montrer que f est bien définie et donner sa parité.
2. Montrer que pour tout $x \in I$ on a

$$(a)\ \tanh(f(x)) = \sin(x). \qquad (b)\ \cosh(f(x)) = \frac{1}{\cos(x)}. \qquad (c)\ \sinh(f(x)) = \tan(x).$$

3. Calculer la fonction dérivée de f.
4. Donner le tableau de variations de f.