Mathématiques - E2C Algèbre 1

Corrigé

<u>Exercice 1 :</u> Logique.

1. Est-ce que les deux propositions suivantes sont équivalentes ? Justifier la réponse.

$$(a) \quad P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \qquad \text{et} \qquad (b) \quad (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R.$$

2. Que signifie l'énoncé suivant (où $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une fonction) :

$$(\exists\, x > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ |u(n)| < x) \to (\exists\, \ell \in \mathbb{R}\, \forall\, \epsilon > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, n' > n,\ |u(n') - \ell| < \epsilon).$$

Donner sa négation.

3. Soient X et Y deux ensembles. Montrer que

$$(a)\ \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cap Y). \qquad (b)\ \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y).$$

Est-ce qu'on a égalité ?

Solution.

1. On écrit la table de vérité.

P	Q	R	$Q \leftrightarrow R$	$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$	$P \leftrightarrow Q$	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	V	F

La 5me et la 7me colonne étant identiques, les deux propositions sont équivalentes.

2. L'énoncé signifie : Si $(u(n))_n$ est une suite bornée, alors il y a une suite extraite convergente. La négation est

$$(\exists\, x > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ |u(n)| < x) \to (\forall\, \ell \in \mathbb{R}\, \exists\, \epsilon > 0\, \exists\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, n' > n,\ |f(n') - \ell| \geq \epsilon).$$

3. (a) Soit $Z \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$. Donc $Z \subseteq X$ et $Z \subseteq Y$, d'où $Z \subseteq X \cap Y$ et $Z \in \mathcal{P}(X \cap Y)$.
Réciproquement, si $Z \in \mathcal{P}(X \cap Y)$, alors $X \subseteq X \cap Y$, d'où $X \subseteq X$ et $Z \subseteq Y$. Ainsi $Z \in \mathcal{P}(X)$ et $Z \in \mathcal{P}(Y)$, et $Z \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$. Donc on a égalité.

   (b) Soit $Z \in \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$. Alors $Z \subseteq X$ ou $Z \subseteq Y$, d'où $Z \subseteq X \cup Y$ et $Z \in \mathcal{P}(X \cup Y)$.
Pour montrer qu'on a pas égalité, soit $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$ avec $x \neq y$, et $Z = \{x, y\}$. Alors $Z \in \mathcal{P}(X \cup Y)$, mais $Z \notin \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$.

<u>Exercice 2 :</u> Applications.

Soient E, E', F, F' quatre ensembles, et $u : E' \to E$ et $v : F \to F'$ deux applications. On définit l'application $\varphi : F^E \to {F'}^{E'}$ par $f \mapsto v \circ f \circ u$.

1. Vérifier que φ est bien définie.
2. Montrer que si v est injective et u surjective alors φ est injective.
Indication : Il ne s'agit pas de montrer que $\varphi(f)$ est injective en tant que fonction de E' vers F'. Utiliser le critère connu de l'injectivité. Pour montrer que deux fonctions dans F^E sont égales, montrer qu'elles ont même valeur pour tout $x \in E$.

3. Montrer que si v est surjective et u injective alors φ est surjective.
   Indication : Prendre $f' \in F'^{E'}$ et trouver des fonctions réciproques unilaterales u', v' bien choisies pour que $f = v' \circ f' \circ u' \in F^E$ satisfasse $\varphi(f) = f'$.

Solution.

1. Si $f \in F^E$ alors $\operatorname{im} u \subseteq E = \operatorname{dom} f$, et $\operatorname{im} f \subseteq F = \operatorname{dom} v$. La composition $v \circ f \circ u$ est donc bien définie, de domaine $\operatorname{dom} u = E'$ et d'image contenu dans $\operatorname{im} v \subseteq F'$. Ainsi $\varphi(f) \in F'^{E'}$.
2. Soit v injective et u surjective. On suppose $f, f' \in F^E$ avec $\varphi(f) = \varphi(f')$. Donc $v \circ f \circ u = v \circ f' \circ u$. Soit $x \in E$. Par surjectivite de u il y a $y \in E'$ avec $u(y) = x$. Ainsi

$$v(f(x)) = v(f(u(y))) = (v \circ f \circ u)(y) = (v \circ f' \circ u)(y) = v(f'(u(y))) = v(f(x)).$$

   Par injectivité de v on a $f(x) = f'(x)$. Puisque $x \in E$ était quelconque, $f = f'$. Ceci montre que φ est injective.
3. Soit v surjective et u injective. Soit $v' : F' \to F$ une fonction réciproque à droite de v, et $u' : E \to E'$ une fonction réciproque à gauche de u. Donc $v \circ v' = \mathrm{id}_{F'}$ et $u' \circ u = \mathrm{id}_{E'}$. Soit maintenant $f' \in F'^{E'}$. On pose $f = v' \circ f' \circ u'$. La composition est bien définie, et $f \in E^F$. Alors

$$\varphi(f) = v \circ f \circ u = v \circ v' \circ f' \circ u' \circ u = \mathrm{id}_{F'} \circ f' \circ \mathrm{id}_{E'} = f'.$$

   Donc $f' \in \operatorname{im} \varphi$, et φ est surjective.

<u>**Exercice 3 :**</u> Les complexes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a + kb) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a + kb).$$

2. Déterminer algébriquement les racines 4^{es} dans $\mathbb{C}$ de $-119 + 120i$.
   Indication : $119^2 + 120^2 = 169^2$ et $169 = 13^2$.
3. Caractériser géométriquement la similitude directe $z \mapsto (2 + 2i)z - (7 + 4i)$.

Solution.

1. On calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a + kb) + i \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a + kb) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(\cos(a + kb) + i \sin(a + kb)\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(a+kb)} = e^{ia} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ib}\right)^k = e^{ia}\left(e^{ib} + 1\right)^n = e^{ia}\left(e^{ib/2}(e^{ib/2} + e^{-ib/2})\right)^n \\ &= e^{i(a+nb/2)} 2^n \cos^n(b/2)) = 2^n \cos(a + nb/2) \cos^n(b/2) + i\, 2^n \sin(a + nb/2) \cos^n(b/2).\end{aligned}$$

   En prenant partie réelle et imaginaire, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a + kb) &= 2^n \cos(a + nb/2) \cos^n(b/2), \quad \text{et} \\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a + kb) &= 2^n \sin(a + nb/2) \cos^n(b/2).\end{aligned}$$

2. On pose $-119 + 120i = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Donc $a^2 - b^2 = -119$, $2ab = 120$ et

$$a^2 + b^2 = |-119 + 120i| = \sqrt{(-119)^2 + 120^2} = 169.$$

   Il en suit que $2a^2 = -119 + 169 = 50$ et $a = \pm 5$, d'où $b = 120/2a = \pm 12$.
   On cherche donc les racines carrées de $\pm(5 + 12i)$. On pose $5 + 12i = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Alors $x^2 - y^2 = 5$, $2xy = 12$ et $x^2 + y^2 = |5 + 12i| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$. Ainsi $2x^2 = 5 + 13$ et $x = \pm 3$, d'où $y = 12/2x = \pm 2$. Les quatre racines 4^{es} de $-119 + 120i$ sont donc $3 + 2i$, $-3 - 2i$, $i(3 + 2i) = -2 + 3i$ et $-i(3 + 2i) = 2 - 3i$.

3. On a $2+2i \neq 1$. Il s'agit donc d'une homothétie-rotation de rapport $|2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, d'angle $\arg(2+2i) = \pi/4$, et de centre le point fixe d'affice $z = f(z) = (2+2i)z - (7+4i)$, d'où

$$z = \frac{7+4i}{1+2i} = \frac{(7+4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{7+8+4i-14i}{1+4} = 3-2i.$$

Exercice 4 : Arithmétique.

1. Donner toutes les solutions entières de l'équation diophantienne $1077z - 711y = 297$.
2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ est à la fois un carré d'un entier et un cube d'un entier, alors n est une puissance 6^{me} d'un entier.

Solution.

1. On calcule $\mathrm{pgcd}(1077, 711)$ et des coefficients de Bézout à l'aide de l'algorithme d'Euclide. On rappelle que $a_n = u_n a + v_n b$, avec $u_{n+1} = u_{n-1} - q_n u_n$ et $v_{n+1} = v_{n-1} - q_n v_n$.

n	a_{n-1}	$=$	a_n	$\times$	q_n	$+$	a_{n+1}	u_n	v_n
0			1077				711	1	0
1	1077	$=$	711	$\times$	1	$+$	366	0	1
2	711	$=$	366	$\times$	1	$+$	345	1	-1
3	366	$=$	345	$\times$	1	$+$	21	-1	2
4	345	$=$	21	$\times$	16	$+$	9	2	-3
5	21	$=$	9	$\times$	2	$+$	3	-33	50
7	9	$=$	3	$\times$	3	$+$	0	68	-103

Ainsi $\mathrm{pgcd}(1077, 711) = 3$, et $1077 \times 68 - 711 \times 103 = 3$. Puisque $297 = 3 \times 99$, il y a des solutions, notamment une solution particulière $(y_0, z_0) = (103 \times 99, 68 \times 99)$. On divise l'équation par 3.

$$1077z - 711y = 297 \quad \text{ssi} \qquad 359z - 237y = 99.$$

Si (y, z) est une solution, alors $359(z - z_0) = 237(y - y_0)$. Puisque $\mathrm{pgcd}(359, 237) = 1$, d'après le lemme de Gauss $237 \mid z - z_0$, et il y a $k \in \mathbb{Z}$ avec $z = 237k + z_0 = 237k + 68 \times 99$. Alors $237(y - y_0) = 359(z - z_0) = 359 \times 237k$ et $y = 359k + y_0 = 359k + 103 \times 99$. Ce calcul montre aussi que

$$359z - 237y = 359z_0 - 237y_0 = 99.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(359k + 10197, 237k + 6732) : k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Soit $n = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$ la décomposition de n en facteurs premiers, avec $p_1 < \cdots < p_k$ des nombres premiers et $a_i \in \mathbb{N}^*$ pour $i = 1, \ldots, k$. Si $\ell, m \in \mathbb{N}$ avec $n = \ell^2 = m^3$, alors ℓ et m divisent n, et leurs facteurs premiers sont parmi les p_i. Donc $\ell = \prod_{i=1}^k p_i^{b_i}$ et $m = \prod_{i=1}^k p_i^{c_i}$, avec $b_i, c_i \in \mathbb{N}$. Or, $\ell^2 = \prod_{i=1}^k p_i^{2b_i}$ et $m^3 = \prod_{i=1}^k p_i^{3c_i}$. Par unicité de la décomposition, $a_i = 2b_i = 3c_i$ pour $i = 1, \ldots, k$. Donc $2 \mid a_i$ et $3 \mid a_i$; puisque $\mathrm{pgcd}(2, 3) = 1$ on a $6 \mid a_i$, et $a_i = 6d_i$ avec $d_i \in \mathbb{N}$. On pose $r = \prod_{i=1}^k p_i^{d_i} \in \mathbb{N}$. Alors $r^6 = n$.

Exercice 5 : Polynômes.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On cherche à montrer qu'il existent des polynômes $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$.

1. Montrer que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, écrire $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ comme somme de deux carrés de polynômes.
3. Montrer que si $S_i, T_i \in \mathbb{R}[X]$ pour $i = 0, \ldots, n$, alors il y a $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $\prod_{i=0}^n (S_i^2 + T_i^2) = P^2 + Q^2$. Indication : $(S^2 + T^2)(S'^2 + T'^2) = (SS' + TT')^2 + (ST' + S'T)^2$.
4. Conclure.

Solution.

1. Supposons que a est une racine réelle de P de multiplicité impaire. Alors $P(X) = (X - a)^k Q(X)$ avec k impair et $Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $\mathbb{Q}(a) \neq 0$. Par continuité il y a $\epsilon > 0$ tel que Q ne change pas de signe dans $]a - \epsilon, a + \epsilon[$. Puisque k est impair, $(X - a)^k$ change de signe en a. Donc P change de signe en a, ce qui est impossible puisque $P(X) \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}$. Donc toutes les racines réelles de P sont de multiplicité paire.

2. Soit $\alpha = b + ic$. Alors

$$(X-\alpha)(X-\bar{\alpha}) = (X-b-ic)(X-b+ic) = (X-b)^2 + c^2.$$

3. Par récurrence. Initialisation : Pour $n = 0$ on prend $P = S_0$ et $Q = T_0$.
Hérédité : Supposons l'enoncé vrai pour n et considérons $\prod_{i=0}^{n+1}(S_i^2 + T_i^2)$. D'après l'hypothèse de récurence il y a $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $\prod_{i=0}^{n}(S_i^2 + T_i^2) = P^2 + Q^2$. Donc

$$\prod_{i=0}^{n+1}(S_i^2 + T_i^2) = (P^2 + Q^2)(S_{n+1}^2 + T_{n+1}^2) = (PS_{n+1} + QT_{n+1})^2 + (PT_{n+1} - QS_{n+1})^2.$$

L'énoncé est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Puisque P est réel, si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est racine P, le conjugué complexe $\bar{\alpha}$ aussi. Donc

$$P(X) = c \prod_i (X - a_i)^{2n_i} \prod_j (X - \alpha_j)(X - \bar{\alpha}_j),$$

où c est le coefficient dominant, les a_i sont les racines réelles distinctes de P, et les $(\alpha_j, \bar{\alpha}_j)$ les couples de racines complexes conjugués de P. Or, $P(0) \geq 0$ implique $c \geq 0$ et $c = d^2 + 0^2$ pour un $d \in \mathbb{R}$, de plus $(X - a_i)^{2n_i} = \big((X - a_i)^n\big)^2 + 0^2$. D'après 2. et 3. il y a $S, T \in \mathbb{R}[X]$ avec $P = S^2 + T^2$.