Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2025-2026
Cursus prépa - Première année

Mathématiques - E2C Algèbre 1
Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Logique.

1. Est-ce que les deux propositions suivantes sont équivalentes ? Justifier la réponse.
$$(a) \quad P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \qquad \text{et} \qquad (b) \quad (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R.$$
2. Que signifie l'énoncé suivant (où $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une fonction) :
$$(\exists\, x > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ |u(n)| < x) \to (\exists\, \ell \in \mathbb{R}\, \forall\, \epsilon > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, n' > n,\ |u(n') - \ell| < \epsilon).$$
Donner sa négation.
3. Soient X et Y deux ensembles. Montrer que
$$(a)\ \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cap Y). \qquad (b)\ \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y).$$
Est-ce qu'on a égalité ?

Exercice 2 : Applications.

Soient E, E', F, F' quatre ensembles, et $u : E' \to E$ et $v : F \to F'$ deux applications. On définit l'application $\varphi : F^E \to {F'}^{E'}$ par $f \mapsto v \circ f \circ u$. Rappel : Y^X est l'ensemble des fonctions de X vers Y.

1. Vérifier que φ est bien définie.
2. Montrer que si v est injective et u surjective alors φ est injective.
Indication : Il ne s'agit pas de montrer que $\varphi(f)$ est injective en tant que fonction de E' vers F'. Utiliser le critère connu de l'injectivité. Pour montrer que deux fonctions dans F^E sont égales, montrer qu'elles ont même valeur pour tout $x \in E$.
3. Montrer que si v est surjective et u injective alors φ est surjective.
Indication : Prendre $f' \in {F'}^{E'}$ et trouver des fonctions réciproques unilaterales u', v' bien choisies pour que $f = v' \circ f' \circ u' \in F^E$ satisfasse $\varphi(f) = f'$.

Exercice 3 : Les complexes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a + kb) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a + kb).$$
2. Déterminer algébriquement les racines 4^{es} dans $\mathbb{C}$ de $-119 + 120i$.
Indication : $119^2 + 120^2 = 169^2$ et $169 = 13^2$.
3. Caractériser géométriquement la similitude directe $z \mapsto (2 + 2i)z - (7 + 4i)$.

Exercice 4 : Arithmétique.

1. Donner toutes les solutions entières de l'équation diophantienne $1077z - 711y = 297$.
2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ est à la fois un carré d'un entier et un cube d'un entier, alors n est une puissance 6^{me} d'un entier.

Exercice 5 : Polynômes.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On cherche à montrer qu'il existent des polynômes $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$.

1. Montrer que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, écrire $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ comme somme de deux carrés de polynômes.
3. Montrer que si $S_i, T_i \in \mathbb{R}[X]$ pour $i = 0, \ldots, n$, alors il y a $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $\prod_{i=0}^{n}(S_i^2 + T_i^2) = P^2 + Q^2$.
Indication : $(S^2 + T^2)(S'^2 + T'^2) = (SS' + TT')^2 + (ST' + S'T)^2$.
4. Conclure.