Université Claude Bernard – Lyon 1 **Semestre d'Automne 2025–2026**

Cursus préparatoire : première année **05 novembre 2025**

Mathématiques - DS n° 2
Durée : 1h30

Consignes. Aucun document autorisé. Calculatrice interdite. Rédiger et justifier toutes les réponses. Le sujet est recto-verso. Le barème indiqué est approximatif.

Exercice 1 (5 points)

a) Traduire en langage logique (avec quantificateurs) :
   i) « Tout entier pair est divisible par 3. »
   ii) « Il existe un entier impair dont le carré est pair. »
   iii) « Si un réel est positif, alors son carré est positif. »

b) Soient les propositions :

$$P(x) : \text{« } x \text{ est pair »}, \quad Q(x) : \text{« } x \text{ est divisible par 4 »}.$$

Traduire en français les propositions suivantes :
   (a) $P(x) \Rightarrow Q(x)$,
   (b) $\neg P(x) \vee Q(x)$,
   (c) $\exists x \in \mathbb{N},\ P(x) \wedge \neg Q(x)$.

c) Écrire la contraposée et la négation de la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x > 1 \Rightarrow x^2 > 1.$$

Exercice 2 (5 points)

1. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$.
   a) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
   b) Ces deux compositions sont-elles égales ? Justifier.
   c) f est-elle injective ? surjective (sur $\mathbb{R}$) ?
2. Soit la relation R sur $\mathbb{Z}$ définie par $x\,R\,y \iff 3 \mid (x - y)$.
   a) Montrer que R est une relation d'équivalence.
   b) Déterminer les classes d'équivalence de 0, 1 et 2, c'est-à-dire les ensembles

$$[a] := \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n\,R\,a \,\} \quad \text{pour} \quad a \in \{0, 1, 2\}.$$

Exercice 3 (4 points)

1. Soit la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_+.$$

   Vérifier que c'est un ordre total.

2. On considère l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$.
   (a) Montrer que E est majoré.
   (b) Justifier que E n'a pas de maximum.
   (c) Donner sa borne supérieure (justifier brièvement).

Exercice 4 (6 points)

a) Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + 2)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   i) Calculer u_1, u_2, u_3.
   ii) Si $u_n \to \ell$, montrer que $\ell = \dfrac{1}{2}(\ell + 2)$ et déterminer ℓ.
   iii) Montrer que (u_n) est croissante et majorée ; conclure.
   iv) Trouver une formule explicite de u_n ($n \in \mathbb{N}$).
   (*On pourra considérer la suite* $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$.)

b) Soit $v_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   i) Étudier la convergence de (v_n).

   On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sup\{v_k : k \geq n\}, \quad w_n = \inf\{v_k : k \geq n\}.$$

   ii) Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} w_n.$$
